

BHS

III

40

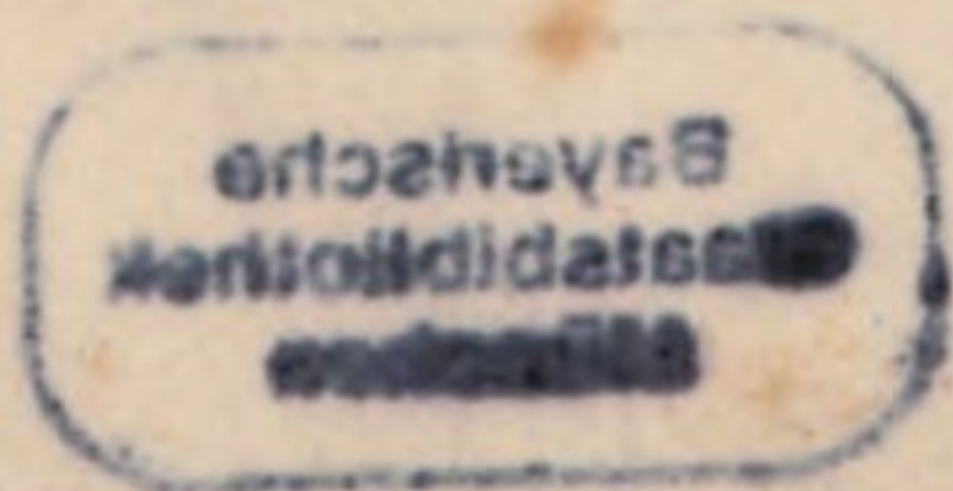
BHS III 40

BIBLIOTHEK
DER K. B. GEMEINSCHAFT
BERGHEUSLIED
ADM. 12. 78



FESTIGKEIT
DER
MATERIALIEN,
NAMENTLICH DES
GUSS- UND SCHMIEDEISENS.

C. L. MOLL UND P. REULEAUX.





FESTIGKEIT

MATERIALIEN

GUSS- UND SCHMIEDEREIEN

PAPIER
AUS DER MECHANISCHEN PAPIER-FABRIK
DER GEBRÜDER VIEWEG ZU WENDHAUSEN
BEI BRAUNSCHWEIG.

2005



DIE
FESTIGKEIT
DER
MATERIALIEN,

NAMENTLICH DES

GUSS- UND SCHMIEDEISENS.

ZUNÄCHST

FÜR INGENIEURE UND POLYTECHNISCHE SCHULEN.

BESONDERER ABDRUCK

AUS DER

„CONSTRUCTIONSLEHRE FÜR DEN MASCHINENBAU“

VON

C. L. MOLL UND F. REULEAUX,

CIVIL-INGENIEUREN.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 5 3.

900 h.

FESTIGKEIT

DER

MATERIALIEN.

— Das Hauptmittel gegen Irrthum und Unwissenheit aller Art ist, sich nicht mit dem zu begnügen, was hergebracht, angewöhnt und anerkannt ist. Wir müssen vielmehr selbst aufs Genaueste (obwohl mit Bescheidenheit) forschen, damit wir Lücken ausfüllen und Mangelhaftes verbessern. Dies ist der einzige Weg zur Wahrheit und Vollkommenheit. —

(Ausspruch Roger Bacon's.)

FÜR INGENIEURE UND POLYTECHNISCHE SCHULEN.

BESONDERER ABDRUCK

VON

CONSTRUCTIONSLEHRE FÜR DEN MASCHINENBAU

VON

G. L. MOHL UND F. REITZEL

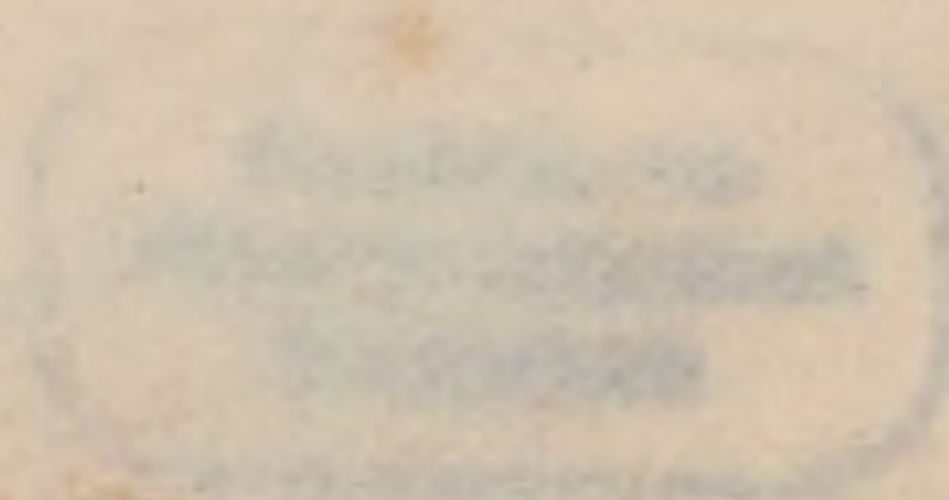
CIVIL-INGENIEURE

MIT 16 KLEINEN ZUSÄTZLICHEN HOLZSCHNITTEN

BRUNNEN

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1873



Vorwort.

Die Bearbeitung einer „Constructionslehre für den Maschinenbau“, mit welcher die Verfasser der vorliegenden kleinen Schrift beschäftigt sind, führte denselben recht lebhaft die Mängel vor Augen, welche die bisherige Art der Anwendung der Festigkeitlehre auf die Fälle der Praxis darbietet. Da die Festigkeitlehre eine der wichtigsten Stützen ist, welche die Wissenschaft dem Ingenieur bei der Lösung der constructiven Aufgaben zu bieten vermag, so scheint es nicht unangemessen, wenn die Verfasser die Ergebnisse ihrer Arbeiten in diesem Gegenstande dem technischen Publicum hiermit zur Prüfung vorlegen. Dass die nachfolgende Abhandlung, welche ursprünglich nur für die „Constructionslehre für den Maschinenbau“ bestimmt war, als besonderer Abdruck erscheint, dürfte durch den grösseren Leserkreis gerechtfertigt sein, welcher sich für den behandelten Gegenstand interessirt.

Obgleich die gewonnenen Resultate, wie man bei genauer Prüfung wohl nicht verkennen wird, sämmtlich auf wissenschaftlicher Grundlage beruhen, so ist doch besonders darauf geachtet worden, dieselben in gedrängter und für den ausführenden Ingenieur brauchbarer Form darzustellen. Möge der Inhalt des vorliegenden Schriftchens von den Theoretikern als richtig, von den Praktikern als nützlich befunden werden.

Berlin, im Juni 1853.

Die Verfasser.

Inhalt.

	Seite
Festigkeit der Materialien	1
Zugfestigkeit stabförmiger Körper	9
Form eines Stabes von gleicher Zugfestigkeit	—
Druckfestigkeit	10
Grösse der Verlängerung oder Verkürzung von prismatischen Stäben, wenn dieselben auf Zug- oder Druckfestigkeit in Anspruch genommen sind	11
Drehungsfestigkeit stabförmiger Körper	12
Berechnung des Drehungswinkels stabförmiger Körper	13
Biegungsfestigkeit	14
Bestimmung der Elasticitätsmomente der Querschnittformen	15
Biegungsfestigkeit stabförmiger Körper	25
Körperformen von gleicher Biegungsfestigkeit	28
Ueber den grössten Werth von $\mathfrak{S}$, der in die Formeln zur Berechnung der Biegungsfestigkeit eingeführt werden darf	34
Tabelle über den grössten Werth von $\mathfrak{S}$, welcher zur Berech- nung der Elasticitätsmomente in die Formeln der §§. 16, 17, 18 eingeführt werden darf	39
Beste Querschnitte	42
Schmiedeeisen	46
Gusseisen	47
Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit für Guss- eisen	51
Biegung prismatischer Stäbe	55
Biegung eines Stabes, der an einem Ende festgehalten und am anderen Ende belastet ist	55
Biegung eines Stabes, welcher an einem Ende befestigt ist, an dessen freiem Ende eine Last P wirkt und auf dessen Länge eine Last Q gleichförmig vertheilt ist	56

Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützen liegt und in der Mitte belastet ist	57
Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützen liegt und auf den ausser einer in seiner Mitte wirkenden Last P noch eine Last Q über seine ganze Länge vertheilt ist	58
Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützpunkten liegt und durch eine Kraft P belastet ist, deren Angriffspunkt um c und c_1 von den Stützpunkten entfernt ist	—
Rückwirkende Festigkeit	59
Arbeitgrössen, welche zur Verlängerung, Verkürzung, Drehung und Biegung von prismatischen Stäben erforderlich sind	60
A. Verlängerung oder Verkürzung	61
B. Drehung der Stäbe	62
C. Biegung der Stäbe	—
Tabellen der Festigkeitscoefficienten	65
Schlussbemerkungen	66

Verbesserungen.

- S. 3 Zeile 4 v. unt. soll es heissen: „vollkommenen Elasticitätskräfte“ statt „vollkommene Elasticitätskraft.“
- S. 15 Zeile 15 v. oben lese man: „Die erwähnte Summe der Momente der Spannungen soll, wenn sämtliche Spannungen vollkommene Elasticitätskräfte sind, das Elasticitätsmoment des Querschnittes heissen.“

Festigkeit der Materialien.

1.

Die Festigkeit eines Körpers ist der Widerstand, welchen die ihm innewohnenden Molekularkräfte einer Trennung seiner kleinsten Theilchen durch äussere Kräfte entgegen zu setzen vermögen. Wenn äussere, auf einen Körper wirkende Kräfte sich nur mit einem Theil von dessen Festigkeit ins Gleichgewicht stellen, so wird hierdurch nur eine Aenderung der ursprünglichen Gleichgewichtslage der sich anziehenden und abstossenden kleinsten Körpertheilchen und hierdurch eine Formänderung des Körpers bewirkt. Je nach der Art und Weise, wie die Molekularkräfte den äusseren, eine relative Verschiebung oder Trennung der Körpertheilchen bewirkenden Kräften widerstehen, kann man die Festigkeit der Körper verschiedenen Auffassungsweisen unterwerfen. Man unterscheidet hinsichtlich der Aeusserung der Festigkeit gewöhnlich folgende Fälle, auf deren Behandlung wir uns auch in dem Späteren beschränken werden.

1) Zugfestigkeit. (Absolute Festigkeit.) Sie ist derjenige Widerstand, welchen ein Körper einem Zuge entgegengesetzt, der ihn zu verlängern und zu zerreißen strebt.

2) Druckfestigkeit. (Festigkeit gegen Zerdrücken.) Sie ist derjenige Widerstand, welchen ein Körper einem Druck entgegengesetzt, der ihn nur zu verkürzen, d. h. seine Theilchen in der Richtung des Druckes einander zu nähern sucht.

- 3) Drehungsfestigkeit. (Torsionsfestigkeit.) Sie ist der Widerstand, welchen ein Körper Kräften entgegensetzt, die, nicht in derselben Normalebene zur Achse des Körpers wirkend, denselben um diese zu drehen streben.
- 4) Biegungsfestigkeit. (Relative Festigkeit.) Sie ist der Widerstand, welchen ein Körper einer Kraft entgegensetzt, die, senkrecht auf seine Achse gerichtet, den Körper zu biegen und abzubrechen strebt.
- 5) Rückwirkende Festigkeit. (Festigkeit gegen Zerknicken.) Sie ist derjenige Widerstand, welchen ein Körper einem Drucke entgegensetzt, der, in der Richtung der Achse des Körpers wirkend, denselben zusammenzudrücken, zu biegen und zu zerknicken sucht.

2.

Die Lehre von der Festigkeit der Materialien bildet einen Zweig der Mechanik und hat die specielle Aufgabe, die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen Gleichgewicht stattfindet zwischen den Molekularkräften der Körper und den auf irgend eine Weise auf letztere einwirkenden äusseren Kräften.

Um zu einer Lösung der Probleme der Festigkeitlehre gelangen zu können, ist es nöthig, eine Annahme über die Constitution der festen Körper zu machen. Die Annahme, welche den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt wird, ist die von den meisten Schriftstellern angewandte, dass man sich eine lineare Aufeinanderfolge von Molekülen eines Körpers als eine Faser denkt, und dabei voraussetzt, dass die Richtung der Fasern immer parallel sei mit der Richtung der Molekularkräfte, welche den äusseren die Festigkeit beanspruchenden Kräften widerstehen. Es werden ferner, um die Aufgaben der Festigkeitlehre zu vereinfachen, die Einwirkungen der äusseren Kräfte immer auf Hervorbringung von Verlängerung oder Verkürzung der Fasern zurückgeführt.

3.

Ein homogener stabförmiger Körper von congruenten Normalquerschnitten ist als ein Bündel ganz gleicher Fasern

anzusehen. Durch zahlreiche und genaue Versuche hat man das Verhalten solcher Körper und damit zugleich das der einzelnen Fasern gegen äussere, eine Verlängerung oder Verkürzung des Stabes bewirkende Kräfte zu ermitteln gesucht. Wird ein prismatischer Stab durch eine äussere Kraft verlängert oder verkürzt, so tritt in der Richtung der Kraft in jedem auf diese normalen Querschnitt zwischen den Molekülen eine Spannung ein, deren Grösse genau gleich ist der Grösse der die Verlängerung oder Verkürzung bewirkenden Kraft. Durch Versuche hat man nun gefunden:

- I. dass die Festigkeit prismatischer Körper aus demselben Material gegen äussere, eine Verlängerung oder Verkürzung bewirkende Kräfte in directem Verhältniss steht zu den Querschnitten der Stäbe.

Es verhalten sich demnach die Spannungen pro Flächeneinheit der Querschnitte von Stäben, welche durch äussere Kräfte verlängert oder verkürzt werden, direct wie die spannenden Kräfte und umgekehrt wie die Querschnitte der Stäbe.

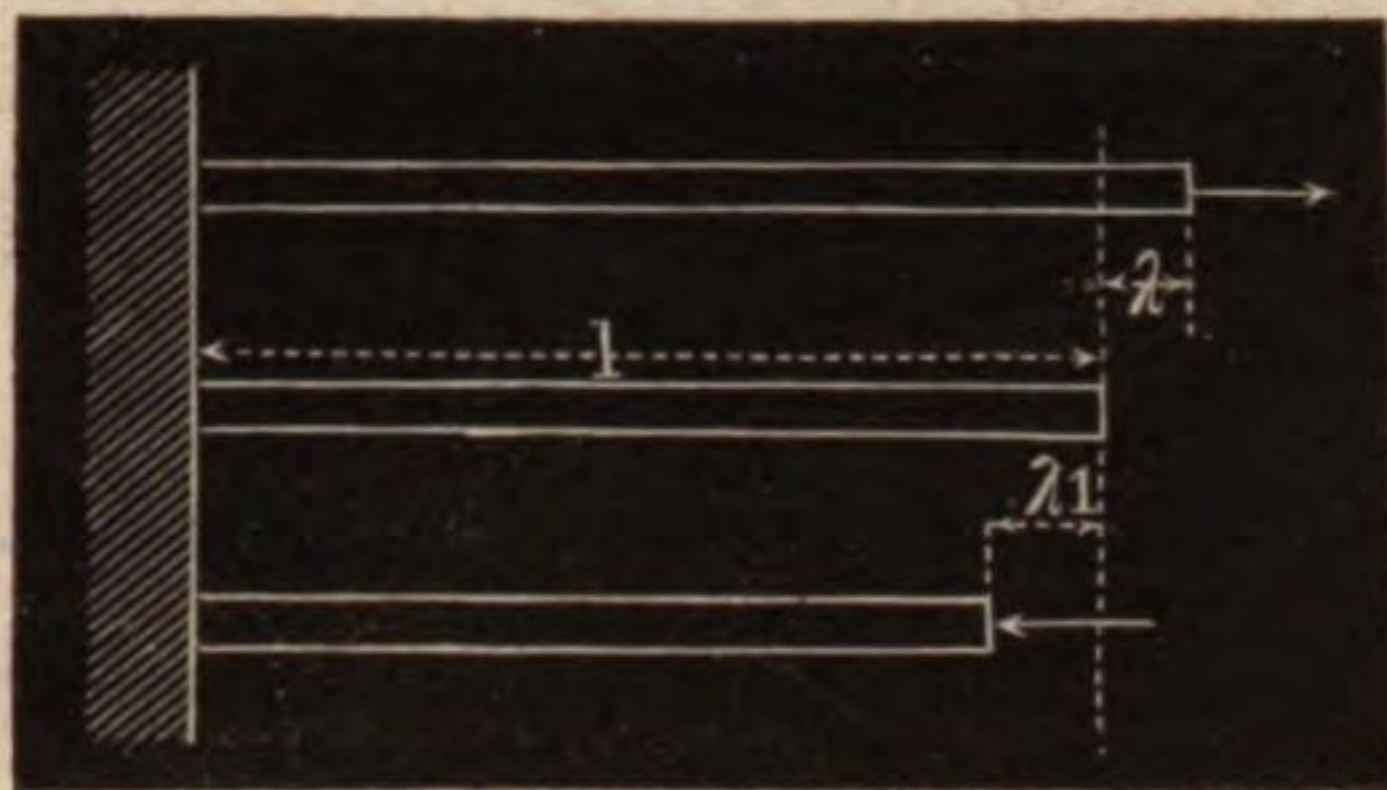
Betrachtet man eine einzelne Faser, auf deren Theilchen keine äusseren Kräfte wirken, und die man sich als gewichtlos denkt, sieht man ferner von den Veränderungen der Länge der Faser in Folge von Temperaturunterschieden ab, so kann man den Zustand, in welchem sich die Faser dann in Folge des Gleichgewichts zwischen den Attractions- und Repulsionskräften ihrer Moleküle befindet, als den Normalzustand der Faser ansehen.

Wenn eine im Normalzustand befindliche Faser durch Einwirkung einer äusseren Kraft verlängert oder verkürzt worden, so kehrt die Faser nach Entfernung der äusseren Kraft wieder in den Normalzustand zurück, wenn ihre Verlängerung oder Verkürzung gewisse Grenzen nicht überschritten hat. So lange die Molekularkräfte noch die Fähigkeit besitzen, den bis zu einem gewissen Grade veränderten Normalzustand einer Faser wieder herzustellen, nennt man jene die vollkommene Elasticitätskraft oder kurz die vollkommene Elasticität der Moleküle. Die Grenze, bis zu der eine Faser über den Normalzustand hinaus verlängert werden darf, ohne hier voll-

kommene Elasticität zu verlieren, nennen wir die Elasticitätsgrenze der Verlängerung, und, im Gegensatze dazu, die Grenze, bis zu welcher eine Faser unter die Elasticitätsgrenze verkürzt werden darf, ohne ihre vollkommene Elasticität einzubüssen, die Elasticitätsgrenze der Verkürzung.

Durch Versuche kann man für jede materielle Faser das Verhältniss der Grösse der Verlängerung oder Verkürzung bei den entsprechenden Elasticitätsgrenzen zu der Länge der Faser im Normalzustande finden. Ist letztere gleich l (Fig. 1),

Fig. 1.



die Grösse der Verlängerung bei der entsprechenden Elasticitätsgrenze $= \lambda$, und die Grösse der Verkürzung bei der entsprechenden Elasticitätsgrenze $= \lambda_1$, so ist $\frac{\lambda}{l}$ das Maass der Verlänge-

rung und $\frac{\lambda_1}{l}$ das Maass der Verkürzung der betreffenden Faser bei den entsprechenden Elasticitätsgrenzen. Es hängt nun lediglich von der Natur des Materials ab, aus dem die Faser besteht, in welchem Verhältniss bei derselben $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{\lambda_1}{l}$ zu einander stehen. Bei der Schmied-eisenfaser verhält sich z. B. $\frac{\lambda}{l} : \frac{\lambda_1}{l}$ sehr nahe wie 1 : 1; bei der Gusseisenfaser dagegen verhält sich $\frac{\lambda}{l} : \frac{\lambda_1}{l}$ sehr nahe wie 1 : 2.

Bleiben sowohl die Verlängerungen, als die Verkürzungen aller Fasern eines stabförmigen Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenzen, so lassen sich als Resultate der darüber angestellten Versuche noch folgende drei Sätze aussprechen:

II. Die Verlängerungen und Verkürzungen einer Faser sind direct proportional den ziehenden und drückenden Kräften und der Länge der Faser im Normalzustande.

III. Die Verlängerungen und Verkürzungen einer Faser sind einander gleich, wenn sie durch gleichgrosse Kräfte erzeugt werden.

IV. Die durch gleiche Kräfte erzeugten Verlängerungen und Verkürzungen eines Stabes sind dem Querschnitt desselben umgekehrt proportional.

Diese drei Sätze verdienen die genaueste Beachtung; sie sind von der grössten Wichtigkeit für die gesammte Festigkeitlehre, indem sie allen in dieser vorkommenden Berechnungen zu Grunde gelegt sind. Wir werden deshalb noch mehrmals auf dieselben zurückzukommen haben.

4.

Bringt die auf eine Faser wirkende äussere Kraft eine Verlängerung oder Verkürzung derselben hervor, welche grösser ist, als die bei der entsprechenden Elasticitätsgrenze stattfindende, so wächst die Verlängerung oder Verkürzung der Faser in einem weit stärkeren, bei verschiedenem Material verschiedenen Verhältnisse, als die dieselbe erzeugende Kraft. Hört dann die Einwirkung der äusseren Kraft auf die Faser auf, so nimmt dieselbe ihre ursprüngliche Länge nicht wieder vollkommen an. Wächst die auf eine Faser wirkende äussere Kraft gar bis zu der Grösse, dass sie den Bruch der Faser herbeiführt, so ist die Kraft, welche den Bruch durch Verlängerung zu bewirken vermag, für manche Materialien sehr verschieden von derjenigen Kraft, welche den Bruch durch Verkürzung veranlasst; so ist letztere Kraft beim Gusseisen z. B. sechs- bis achtmal grösser als erstere. Die Gesetze für die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern über die Elasticitätsgrenzen hinaus sind noch nicht ermittelt und dürfen die im vorigen Paragraphen unter II., III. und IV. ausgesprochenen Sätze auf dieselben nicht angewandt werden.

Es ist zwar durch den Versuch schwer zu entscheiden, ob eine Faser, welche über die entsprechende Elasticitätsgrenze hinaus verlängert oder verkürzt worden ist, durch das dauernde Einwirken der Kraft, welche jene Verlängerung oder Verkürzung hervorgebracht hat, nothwendig dem endlichen Bruch ent-

gegengeführt wird. Die Untersuchung guter sich bewährt habender Constructionen zeigt jedoch, dass die Dimensionen derselben solche sind, dass durch die Einwirkung der Kräfte, denen jene Constructionen zu widerstehen haben, in keinem Theile derselben eine Faser über die entsprechende Elasticitätsgrenze verlängert oder verkürzt wird. Auch haben die bedeutendsten Ingenieure stets den Grundsatz ausgesprochen und befolgt, dass bei der Berechnung von Constructionstheilen vor Allem darauf gesehen werden müsse, dass in keinem derselben eine die Elasticitätsgrenzen überschreitende Spannung eintreten könne.

Eine Festigkeitlehre, welche zur Berechnung der Dimensionen von Constructionstheilen dienen soll, muss daher folgender Bedingung entsprechen:

Die Dimensionen, welche man mit ihrer Hülfe für die Constructionstheile findet, müssen solche sein, dass in keiner Faser eines Constructionstheiles, wenn dieser der ihm bestimmten Pressung zu widerstehen hat, eine grössere Spannung eintritt, als sie bei der entsprechenden Elasticitätsgrenze in einer Faser des bezüglichen Materials stattfindet.

Eine Festigkeitlehre wird deshalb auch für die Praxis vollkommen genügend sein, wenn sie nur die genannte Bedingung erfüllt, d. h. wenn sie die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äusseren auf einen Körper wirkenden Kräften und den Molekularkräften desselben nur für die Fälle aufstellt, in welchen letztere Kräfte noch sämmtlich vollkommene Elasticitätskräfte sind, und für welche die im vorigen Paragraphen unter II., III. und IV. ausgesprochenen Sätze Gültigkeit haben.

5.

Wenn eine äussere auf einen stabförmigen Körper wirkende Kraft sich nur mit einem Theil von dessen Festigkeit so ins Gleichgewicht stellt, dass alle Fasern des Stabes bis zur Elasticitätsgrenze verlängert werden, so tritt in dem Stabe in der Richtung der Kraft eine Spannung ein, die wir dessen

stabile Zugfestigkeit nennen wollen. Im Gegensatz dazu nennen wir diejenige Spannung, welche in der Richtung des Druckes in einem Körper eintritt, wenn dieser bis zur Elasticitätsgrenze verkürzt wird, die stabile Druckfestigkeit desselben. (Die Wahl des Adjectives »stabil« ist wohl dadurch gerechtfertigt, dass sich die Theilchen der Fasern, wenn diese innerhalb der Elasticitätsgrenzen verlängert oder verkürzt werden, immer in einer stabilen Gleichgewichtslage befinden, indem dann die Molekularkräfte die Theilchen nach Entfernung der äusseren Kraft immer wieder in die Lage des Normalzustandes zurückführen.)

Unter den Coëfficienten der stabilen Zug- oder Druckfestigkeit eines Materials wird die in Gewichteinheiten ausgedrückte Kraft verstanden, welche in einem Stabe von einem Querschnitt gleich der Flächeneinheit eine Spannung gleich der stabilen Zug- oder Druckfestigkeit des betreffenden Materials zu erzeugen vermag. Der Coëfficient der stabilen Zugfestigkeit soll durch F_z , und der Coëfficient der stabilen Druckfestigkeit durch F_d bezeichnet werden. Die bis jetzt ermittelten Werthe derselben für verschiedene Materialien sind in den Tabellen §. 36 zusammengestellt.

Wenn, wie es nach §. 3 sein kann, bei einem Stabe die Verlängerung bis zur Elasticitätsgrenze verschieden ist von der Verkürzung bei der Elasticitätsgrenze, so müssen auch, nach Satz II. desselben Paragraphen, die Coëfficienten der stabilen Zug- und Druckfestigkeit dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie jene Verlängerung und Verkürzung.

Im Falle alle Fasern eines Stabes durch einen Zug oder Druck zwischen den Elasticitätsgrenzen verlängert oder verkürzt worden sind, kann man die hierdurch in den Fasern pro Flächeneinheit entstandene Spannung $\mathfrak{S}$ als Proportionaltheil des Coëfficienten der stabilen Zug- oder Druckfestigkeit des Materials, aus welchem der Stab besteht, ausdrücken; und es ist $\frac{\mathfrak{S}}{F_z}$ oder $\frac{\mathfrak{S}}{F_d}$ gleich der Grösse der Beanspruchung in Bezug auf die stabile Zug- oder Druckfestigkeit. Den reci-

proben Werth dieses Ausdruckes $— \frac{F_z}{\mathfrak{S}}$ oder $\frac{F_d}{\mathfrak{S}}$ — nennen wir die stabile Sicherheit, d. h. die Sicherheit gegen die Ueberschreitung der stabilen Zug- oder Druckfestigkeit. Wo in der Folge der Beanspruchung und Sicherheit erwähnt werden, sind dieselben, wenn nicht das Gegentheil besonders bemerkt ist, immer auf die stabile Festigkeit bezogen.

Die bei verschiedenen Constructionstheilen anzuwendende stabile Sicherheit schwankt zwischen $1\frac{1}{3}$ bis 4facher Sicherheit; in einer grossen Zahl von Fällen ist eine zweifache Sicherheit gegen die wirklich eintretenden Maximalpressungen genügend.

Bei der Berechnung der Ausdehnung oder Verkürzung von Stäben und Fasern bedient man sich als Maasses der Elastizitätskraft der Materialien einer Grösse, die man den Elastizitätsmodul nennt und durch E bezeichnet. Dieser drückt die Kraft in Gewichteinheiten aus, welche erforderlich sein würde, um einen Stab, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, auf das Doppelte seiner Länge im Normalzustande zu verlängern, oder auf die Hälfte derselben zu verkürzen, wenn bis zur genannten Verlängerung oder Verkürzung dieselben Gesetze Gültigkeit hätten, welche für die Verlängerungen und Verkürzungen innerhalb der Elasticitätsgrenzen bestehen. Dass ein und derselbe Elasticitätsmodul bei einem Material sowohl für Verlängerung als für Verkürzung gilt, folgt aus Satz III. §. 3. In den Tabellen in §. 36 sind die Elasticitätsmodel verschiedener Materialien zusammengestellt.

Wir können jetzt zu den Formeln übergehen, welche bei der Anwendung der Gesetze der Festigkeit auf die verschiedenen allgemeinen Fälle der Construction dienen können. Der Zweck des Werkes erlaubt es jedoch nicht, hier die Begründung der einzelnen Formeln mitzutheilen, und verweisen wir wegen derselben auf die Lehrbücher der theoretischen Mechanik. Obgleich diese statt der stabilen Festigkeit meist die Bruchfestigkeit in die Rechnung hineinziehen, so hat dieses doch keinen Einfluss auf die Herleitung der Festigkeitformeln, da dieselbe doch immer auf die Sätze I. bis IV. §. 3. gegründet ist.

Zugfestigkeit stabförmiger Körper.

6.

Nennt man:

P die auf Verlängerung eines Stabes wirkende Kraft;

q den kleinsten auf die Zugrichtung normalen Querschnitt des Stabes;

$\mathfrak{S}$ die durch die Kraft P in dem Querschnitt q erzeugte Spannung, bezogen auf die Flächeneinheit,

so ist, wenn man das Gewicht des Stabes vernachlässigt:

$$P = \mathfrak{S} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$q = \frac{P}{\mathfrak{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(1) Soll der Stab nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus verlängert werden, so darf die Spannung $\mathfrak{S}$ nicht grösser werden, als der Coëfficient F_z der stabilen Zugfestigkeit des Materials, aus dem der Stab besteht.

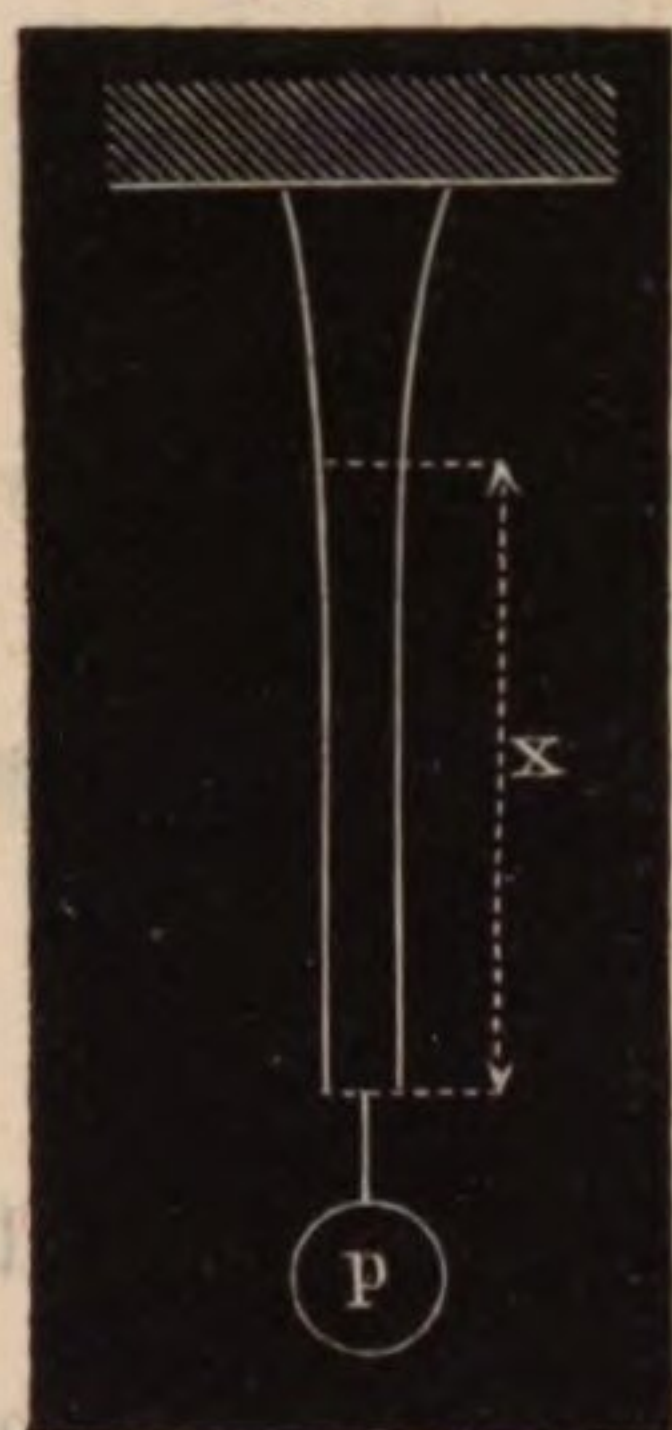
7.

Form eines Stabes von gleicher Zugfestigkeit.

Ist ein auf Zugfestigkeit beanspruchter Stab so aufgehängt, dass seine Festigkeit auch durch sein eigenes Gewicht

in Anspruch genommen wird, so muss, wenn alle Querschnitte des Stabes gleiche Festigkeit gewähren sollen (d. h. wenn in allen auf die Zugrichtung normalen Querschnitten die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung $\mathfrak{S}$ dieselbe sein soll), das Gewicht des Stabes bei Berechnung der demselben zu gebenden Form berücksichtigt werden. Die Festigkeit jedes Querschnittes erfährt ausser der Beanspruchung durch die dem Stabe angehängte Last noch die durch das Gewicht des unter ihm befindlichen Theiles des Stabes. Soll nun in der ganzen Ausdehnung des Letzteren gleiche Spannung herrschen, so muss sein Querschnitt von unten nach oben stetig zunehmen. Die Form des Stabes, bei der diese Bedingung erfüllt wird, bestimmt sich durch folgende Gleichung.

Fig. 2.



Nennt man (Fig. 2):

P die an den Stab gehängte Last;

γ das Gewicht einer Cubikeinheit des Materials, aus welchem der Stab besteht;

$\mathfrak{S}$ die Spannung pro Flächeneinheit, welche in der ganzen Ausdehnung des Stabes in der Richtung des Zuges herrschen soll;

$e = 2,718$, die Basis der natürlichen Logarithmen;

Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb seines unteren Endes,

so ist:

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{S}} x} \quad (4)$$

und daraus:

$$\log. \Omega = \log. \frac{P}{\mathfrak{S}} + 0,434 \frac{\gamma}{\mathfrak{S}} x \quad (5)$$

Druckfestigkeit.

8.

Wenn ein Körper nur auf Druckfestigkeit beansprucht werden soll, so muss seine Länge in der Richtung des Druckes im Verhältniss zu den übrigen Dimensionen nicht so gross sein, dass eine Biegung der Fasern eintreten kann. Nennt man:

P den auf Verkürzung eines Körpers wirkenden Druck;

q den kleinsten auf die Druckrichtung normalen Querschnitt des Körpers;

$\mathfrak{S}$ die durch den Druck P in dem Querschnitt q erzeugte Spannung, bezogen auf die Flächeneinheit,

so ist, unter Vernachlässigung des Gewichts des Körpers:

$$P = \mathfrak{S} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$q = \frac{P}{\mathfrak{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{q}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Formeln, welche der Form nach mit denen für die Zugfestigkeit übereinstimmen.

Soll der Körper nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus verkürzt werden, so darf die Spannung $\mathfrak{S}$ den Coëfficienten F_d der stabilen Druckfestigkeit des Materials, aus welchem der Stab besteht, nicht übersteigen.

9.

Grösse der Verlängerung oder Verkürzung von prismatischen Stäben, wenn dieselben auf Zug- oder Druckfestigkeit in Anspruch genommen sind.

Nennt man:

l die ursprüngliche Länge eines prismatischen Stabes;

q den Querschnitt desselben;

Diese Formeln sind auf die Annahme gegründet, dass sich beim Verwinden sämtliche Fasern des Stabes verlängern*); soll daher die Spannung der stärkst beanspruchten Faser nicht über die bei der Elasticitätsgrenze stattfindende hinausgehen, so darf der Werth von $\mathfrak{S}$ nicht grösser sein, als der Coëfficient F_z der stabilen Zugfestigkeit des betreffenden Materials.

11.

Berechnung des Drehungswinkels stabförmiger Körper.

Es sei (Fig. 4):

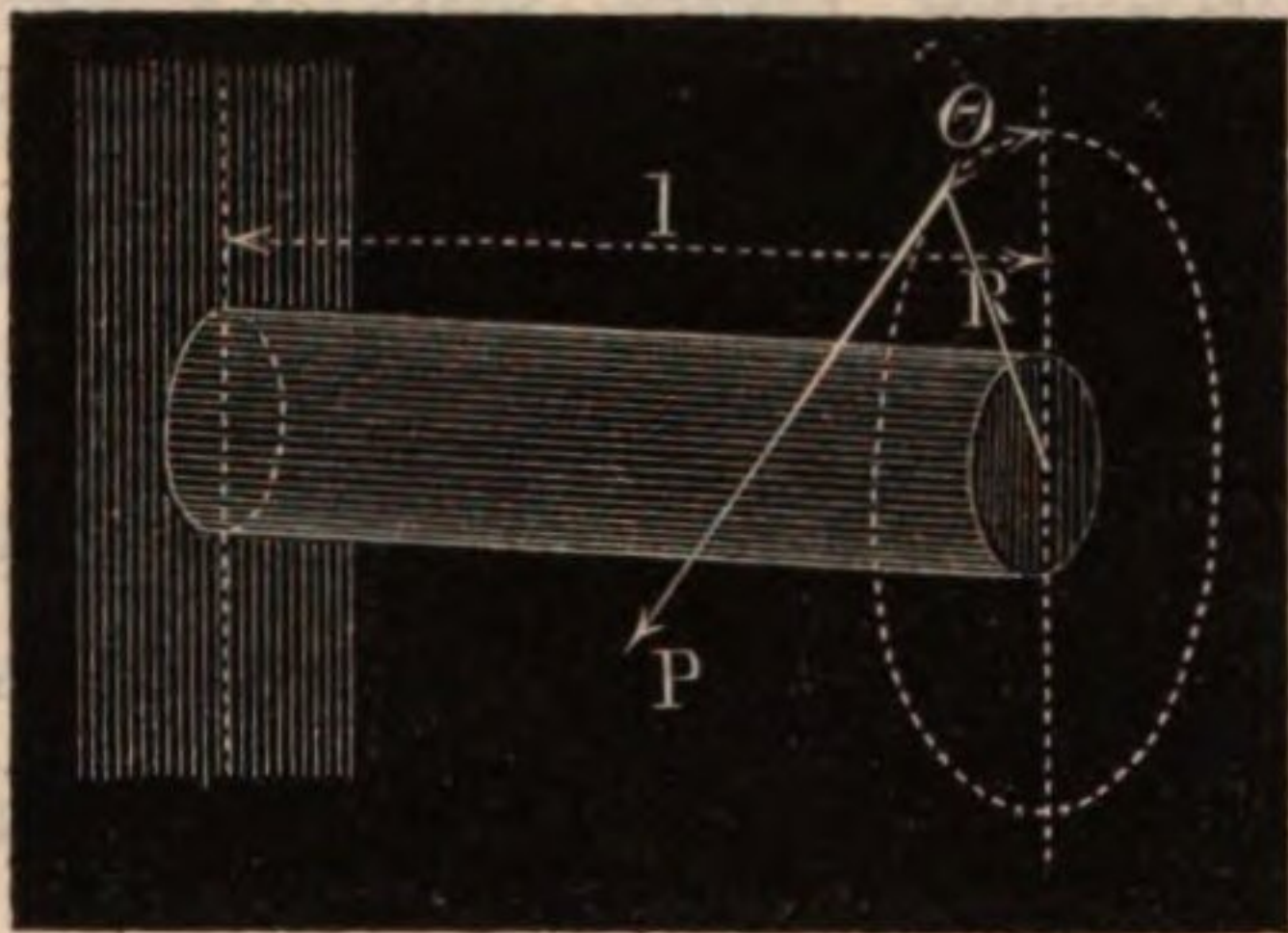
PR das statische Moment der Kraft, durch welche ein Stab verwunden wird (P die Kraft, R deren Hebelarm);

l die Länge des Stabes;

Θ der in Graden ausgedrückte Drehungswinkel;

G der Drehungsmodul, d. h. das statische Moment der Kraft, welche einen Stab, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Länge gleich der Längeneinheit ist, um 360° zu ver-

Fig. 4.



drehen vermag (der Werth von G für ein Material beträgt $\frac{2}{5}$ des Elasticitätsmoduls E desselben Materials; in den Tabellen des §. 36 sind für verschiedene Materialien die Werthe von G angegeben).

Alsdann ist:

a) für einen cylindrischen Stab von dem Durchmesser d :

*) Diese Annahme scheint nach den angestellten Versuchen nicht die strengrichtige zu sein, und es ist sehr wahrscheinlich, dass in auf Drehungsfestigkeit beanspruchten Stäben eine polare neutrale Schicht entsteht. Bisher ist aber noch keine Theorie bekannt geworden, welche eine solche neutrale Schicht voraussetzt und die Lage derselben bestimmen lehrt.

$$\Theta = 16 \cdot \frac{PR}{G} \cdot l \cdot \frac{360^\circ}{d^4 \pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

b) für einen quadratischen Stab, dessen Seite = b :

$$\Theta = 6 \cdot \frac{PR}{G} \cdot l \cdot \frac{180^\circ}{b^4 \pi} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

c) für einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten h und b :

$$\Theta = 3 \cdot \frac{PR}{G} \cdot l \cdot \frac{h^2 + b^2}{h^3 b^3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Biegungsfestigkeit.

12.

Ist ein stabförmiger Körper in horizontaler Lage mit einem Ende eingemauert und wirkt auf das freie Ende ein Gewicht P , so wird der Stab dadurch gebogen. Es erfahren dabei die Fasern der convex gewordenen Seite eine Verlängerung und die der concaven Seite eine Verkürzung, wodurch denn ein Theil des Stabes auf Zugfestigkeit, ein anderer auf Druckfestigkeit beansprucht wird. Zwischen den verlängerten und den verkürzten Faserschichten giebt es in dem Stab eine Schicht, deren Fasern nur gebogen, dabei aber weder verlängert, noch verkürzt werden; man nennt sie deshalb die neutrale Faserschicht.

Wie die hierüber angestellten Versuche gezeigt haben, sind die Verlängerungen und Verkürzungen der einzelnen Fasern, wenn sie innerhalb der Elasticitätsgrenzen bleiben, direct proportional dem Abstand der Fasern von der neutralen Schicht. Dabei werden in Folge der Biegung des Stabes alle Fasern, welche in einer zur neutralen parallelen Schicht liegen, um gleichviel verlängert oder verkürzt. Wird in einem einer Biegung ausgesetzten prisma-

tischen Stab keine Faser über die entsprechende Elasticitätsgrenze verlängert oder verkürzt, so geht, wie die Mechanik nachweist, die neutrale Schicht immer durch die Schwerpunkte der normalen Querschnitte des Stabes. Durch die neutrale Faserschicht wird ferner jeder normale Querschnitt des Stabes in zwei Theile getheilt; die Durchschnittlinie der neutralen Schicht mit einem Normalquerschnitt ist dessen neutrale Achse. Diese geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes und steht in der Ebene des Letzteren normal auf der Durchschnittlinie des Querschnittes mit der Ebene, welche durch die Richtung der biegenden Kraft und den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Wir nennen den zu der einen Seite der neutralen Achse liegenden Theil des Querschnittes, in welchem alle Fasern verlängert werden, die Zugseite, und den andern Theil des Querschnittes die Druckseite desselben.

Durch die Biegung eines Stabes entstehen ausser den Spannungen in den verlängerten und verkürzten Fasern auch noch Pressungen der zur neutralen Schicht parallelen Faserschichten aufeinander; allein diese können, wenn die Biegung klein ist, ohne bedeutenden Fehler vernachlässigt werden. Unter dieser Vernachlässigung tritt zwischen den Elasticitätskräften des Stabes und der denselben biegenden Kraft Gleichgewicht ein, wenn für jeden normalen Querschnitt die Summe der statischen Momente aller in demselben vorkommenden Spannungen in Bezug zu seiner neutralen Achse gleich ist dem statischen Moment der biegenden Kraft, bezogen auf dieselbe neutrale Achse. Die erwähnte Summe der Momente der Spannungen heisst das Elasticitätsmoment des Querschnittes. Die Mechanik zeigt nun, dass der Ausdruck für das Elasticitätsmoment eines Querschnittes gleich ist dem Producte aus der Spannung, welche in dem Querschnitt in der Entfernung 1 von der neutralen Achse pro Flächeneinheit eintritt, in einen Factor, welcher identisch ist mit dem Trägheitsmomente des Querschnittes, bezogen auf dessen neutrale Achse.

13.

Bestimmung der Elasticitätsmomente der Querschnittformen.

Nennt man bei einem einer Biegung ausgesetzten Stabe:

T das Trägheitsmoment eines normalen Querschnittes, bezogen auf dessen neutrale Achse;

a die Entfernung der in diesem Querschnitt stärkst gespannten (verlängerten oder verkürzten) Faser von der neutralen Achse;

$\mathfrak{S}$ die auf die Flächeneinheit bezogene stärkste Spannung, welche in dem bezüglichen Querschnitt in der Entfernung a in Folge der Biegung des Stabes eintritt;

M das Elasticitätsmoment des Querschnittes, für welchen T , a und $\mathfrak{S}$ gelten,

so ist:

$$M = \frac{\mathfrak{S}}{a} \cdot T = \mathfrak{S} \cdot \frac{T}{a} \quad (17)$$

Der Factor $\frac{T}{a}$ hängt einzig von der Form und den Dimensionen des in Betracht zu ziehenden Querschnittes ab; wir bezeichnen $\frac{T}{a}$ durch Z und nennen diesen Werth den Querschnittmodul; man hat daher auch:

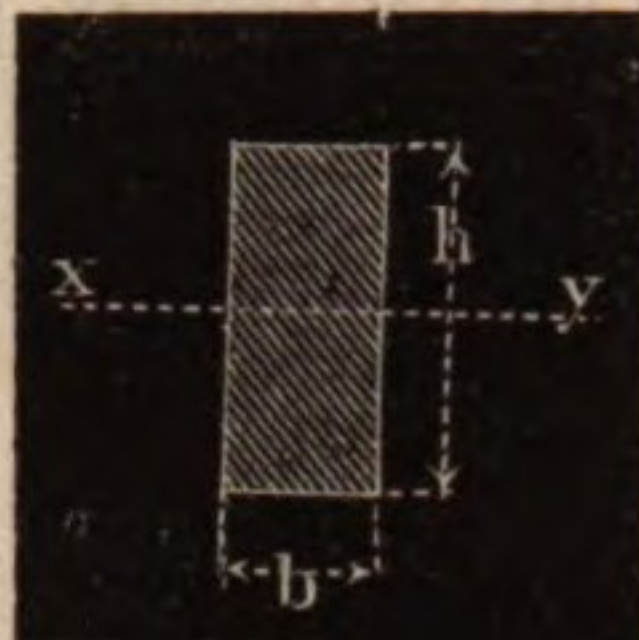
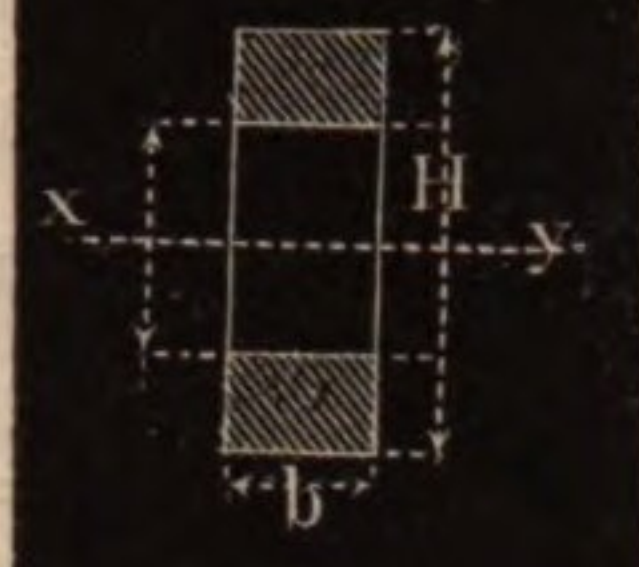
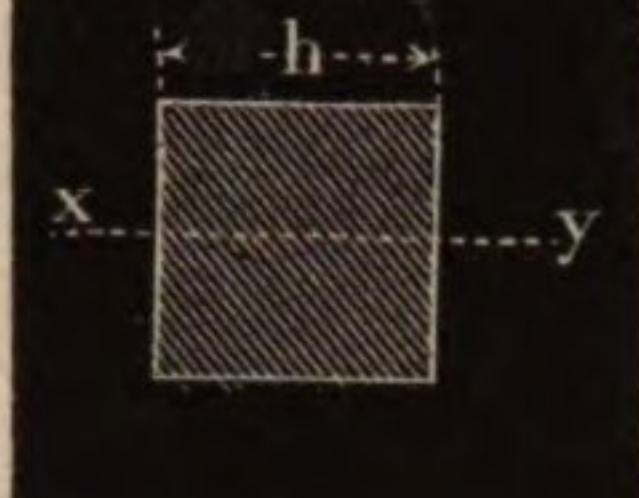
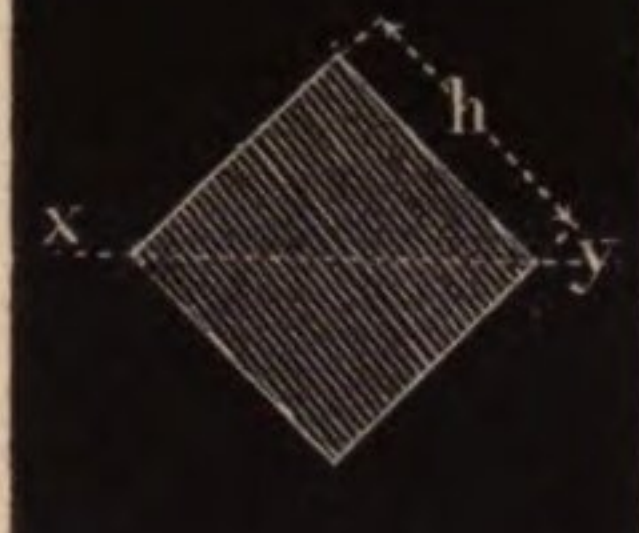
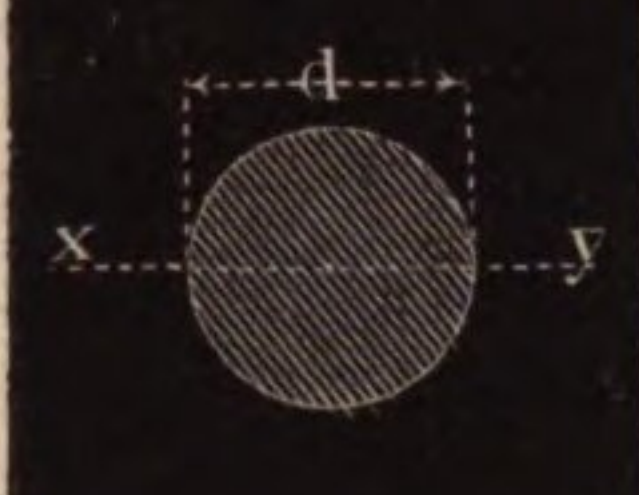
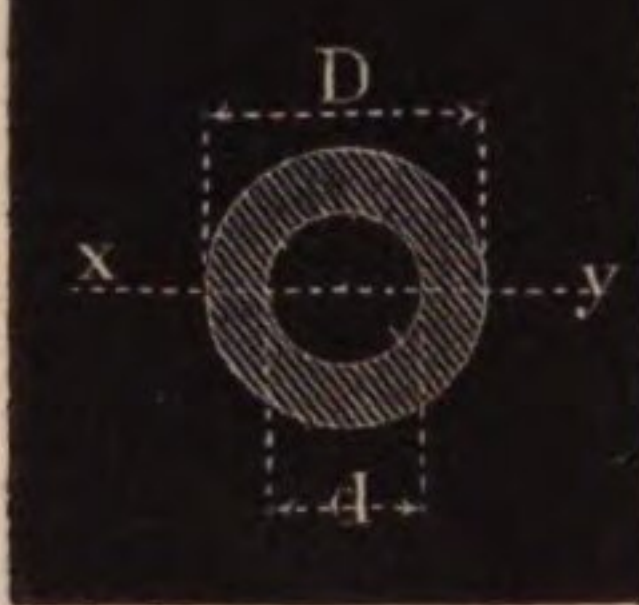
$$M = \mathfrak{S} \cdot Z \quad (18)$$

Zur bequemen Berechnung der Elasticitätsmomente für die Fälle der Anwendung sind in den Tabellen der beiden folgenden Paragraphen die Model der gebräuchlichsten Querschnittformen zusammengestellt.

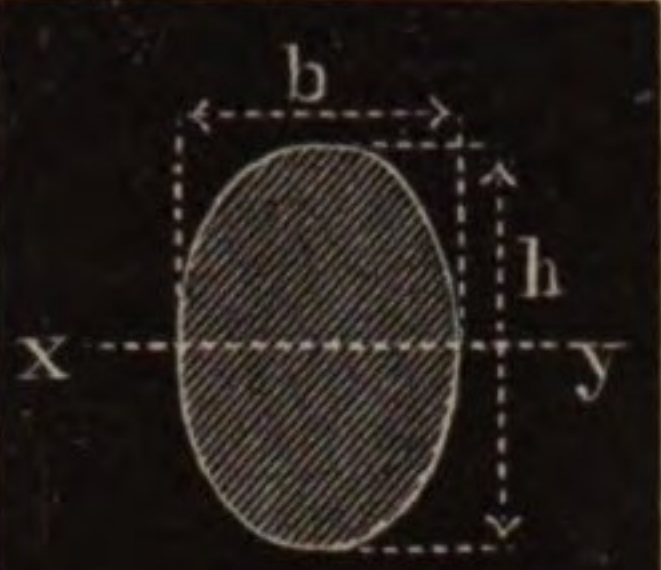
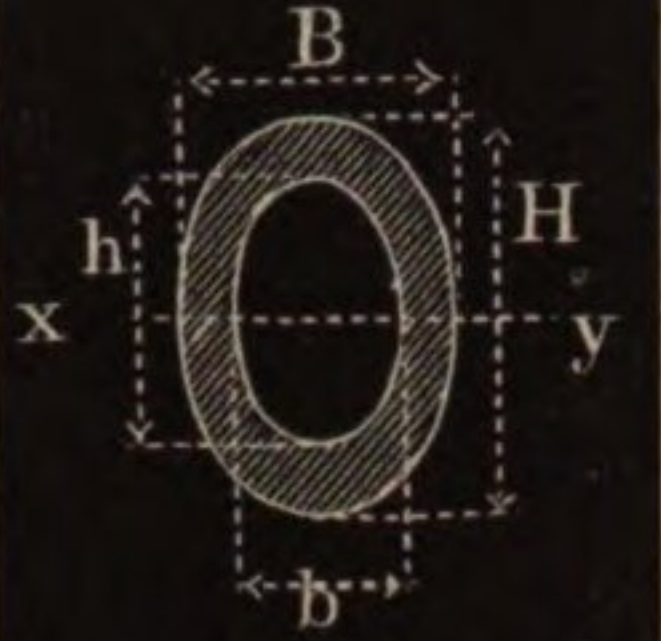
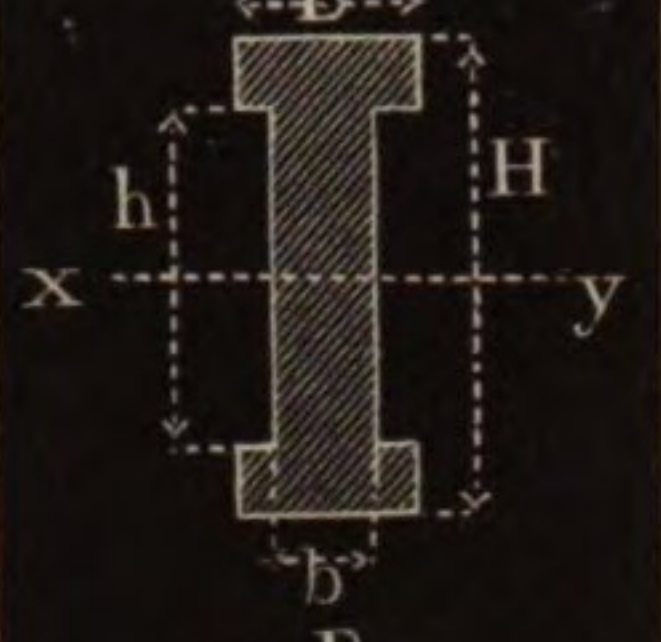
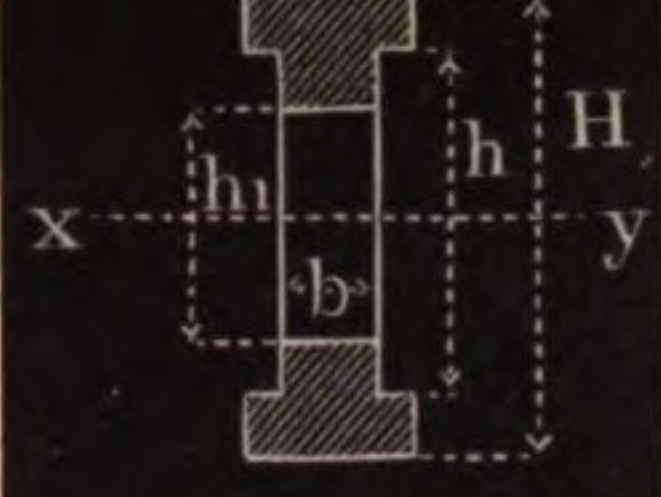
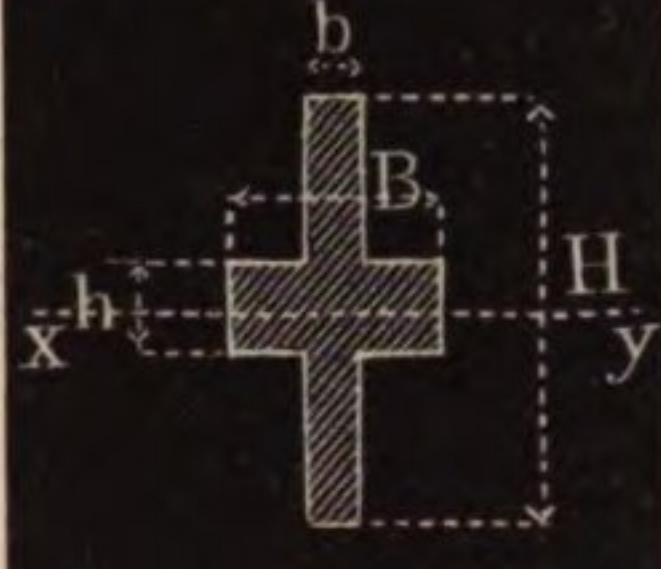
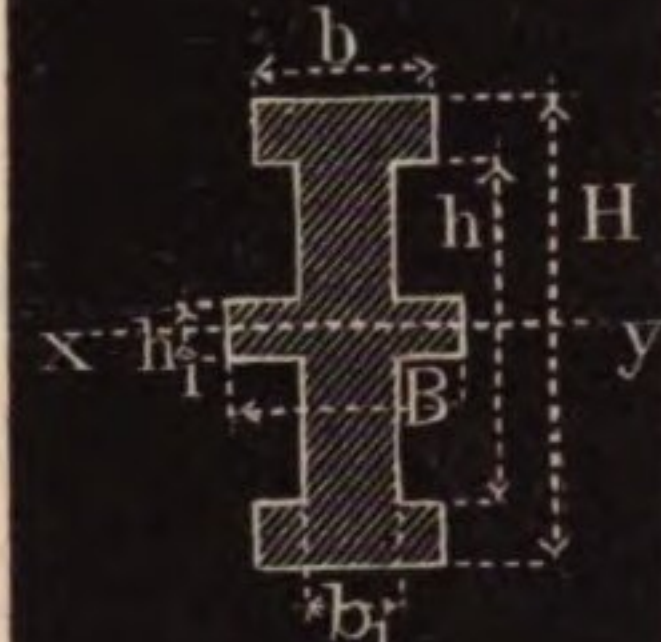
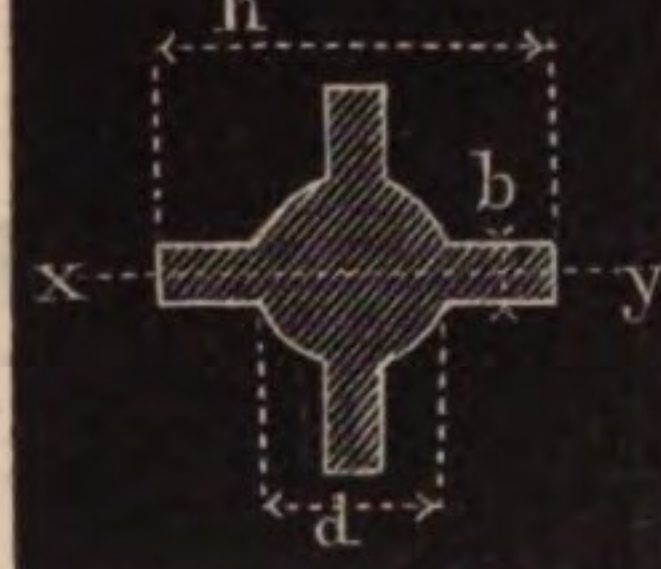
14.

Die folgende Tabelle enthält für verschiedene zweiachsig-symmetrische Querschnitte:

- 1) das Trägheitsmoment T , bezogen auf die neutrale Achse xy des Querschnittes;
- 2) die Entfernung a der stärkst gespannten Faser von der neutralen Achse xy ;
- 3) den Querschnittsmodul $Z = \frac{T}{a}$;
- 4) den Flächeninhalt F des Querschnittes.

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment. T .
I.		$\frac{1}{12} b h^3$
II.		$\frac{1}{12} b (H^3 - h^3)$
III.		$\frac{1}{12} h^4$
IV.		$\frac{1}{12} h^4$
V.		$\frac{5}{256} h^4 \sqrt{3} = 0,0338 h^4$
VI.		$\frac{\pi}{64} d^4 = 0,0491 d^4$
VII.		$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 0,0491 (D^4 - d^4)$

a.	Querschnittsmodul Z.	Flächeninhalt F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} b h^2$	$b h$
$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{b}{H} (H^3 - h^3)$	$b (H - h)$
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} h^3$	h^2
$\frac{h}{2} \sqrt{2}$	$\frac{h^3}{6\sqrt{2}} = 0,118 h^3$	h^2
$\frac{h}{4} \sqrt{3}$	$\frac{5}{64} h^3 = 0,0781 h^3$	$0,6495 h^2$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} d^3 = 0,0982 d^3$	$\frac{\pi}{4} d^2 = 0,785 d^2$
$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = 0,0982 \frac{D^4 - d^4}{D}$	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 0,785 (D^2 - d^2)$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment T .
VIII.		$\frac{\pi}{64} b h^3 = 0,0491 b h^3$
IX.		$\frac{\pi}{64} (BH^3 - bh^3) = 0,0491 (BH^3 - bh^3)$
X.		$\frac{1}{12} [B(H^3 - h^3) + bh^3]$
XI.		$\frac{1}{12} [B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)]$
XII.		$\frac{1}{12} [Bh^3 + b(H^3 - h^3)]$
XIII.		$\frac{1}{12} [Bh_1^3 + b(H^3 - h^3) + b_1(h^3 - h_1^3)]$
XIV.		$\frac{1}{12} [0,589 d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)]$

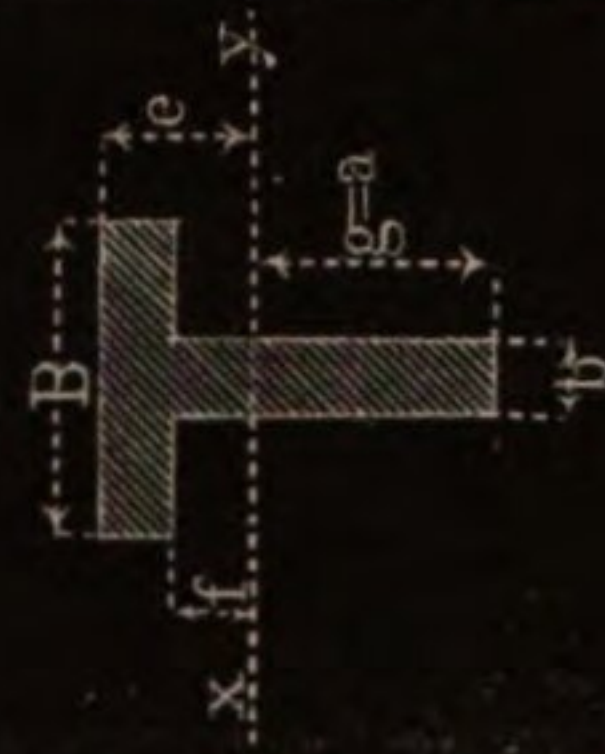
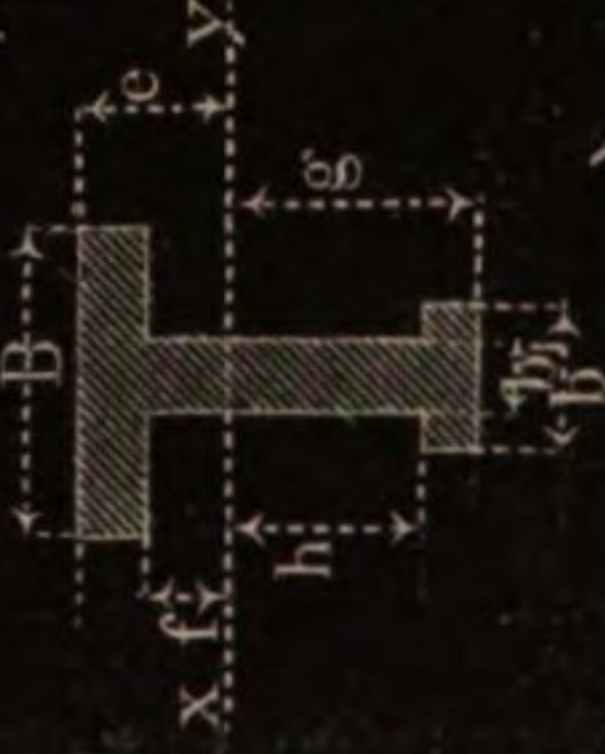
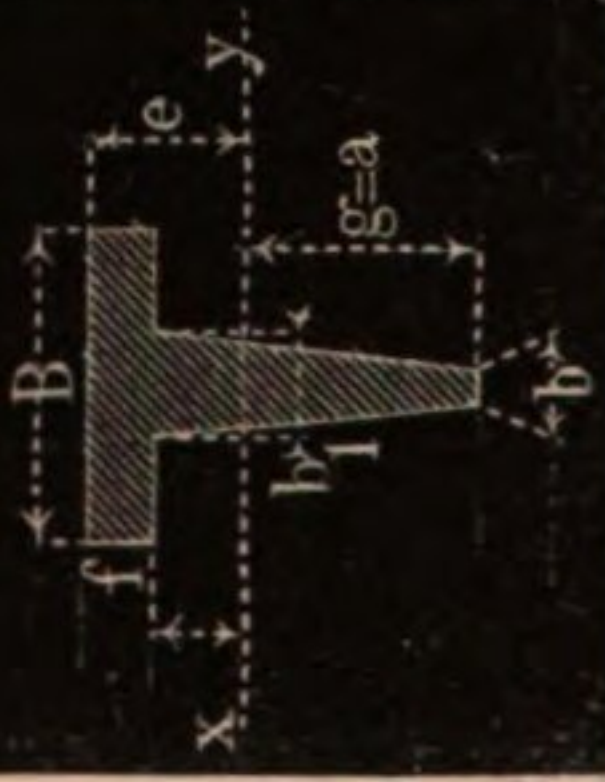
$a.$	Querschnittmodul $Z.$	Flächeninhalt $F.$
$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} bh^2 = 0,0982 bh^2$	$\frac{\pi}{4} bh = 0,785 bh$
$\frac{H}{2}$	$\frac{\pi}{32} \left(\frac{BH^3 - bh^2}{H} \right)$ $= 0,0982 \left(\frac{BH^3 - bh^3}{H} \right)$	$\frac{\pi}{4} (BH - bh)$ $= 0,785 (BH - bh)$
$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{6H} [B(H^3 - h^3) + bh^3]$	$BH - h(B - b)$
$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{6H} [B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)]$	$B(H - h) + b(h - h_1)$
$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{6H} [Bh^3 + b(H^3 - h^3)]$	$Bh + b(H - h)$
$\frac{H}{2}$	$\frac{1}{6H} [Bh_1^3 + b(H^3 - h^3) + b_1(h^3 - h_1^3)]$	$Bh_1 + b(H - h) + b_1(h - h_1)$
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} [0,589 d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)]$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2b(h - d)$

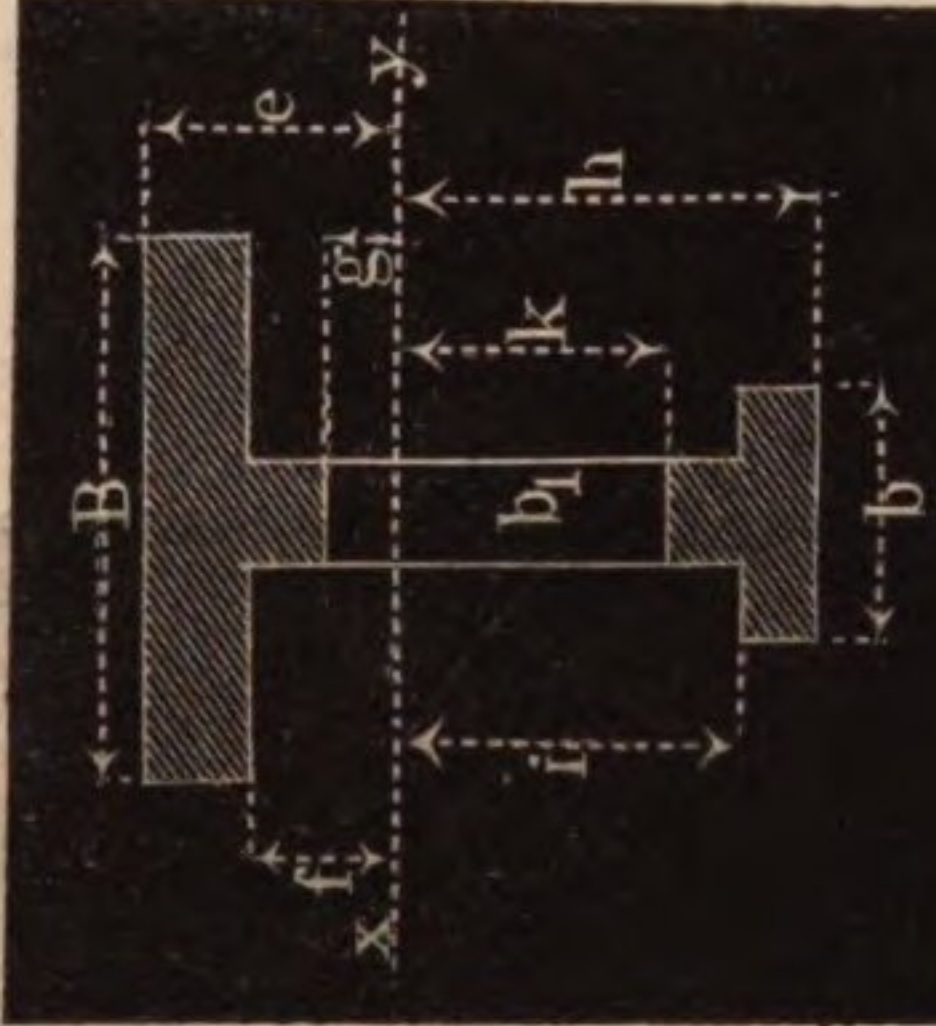
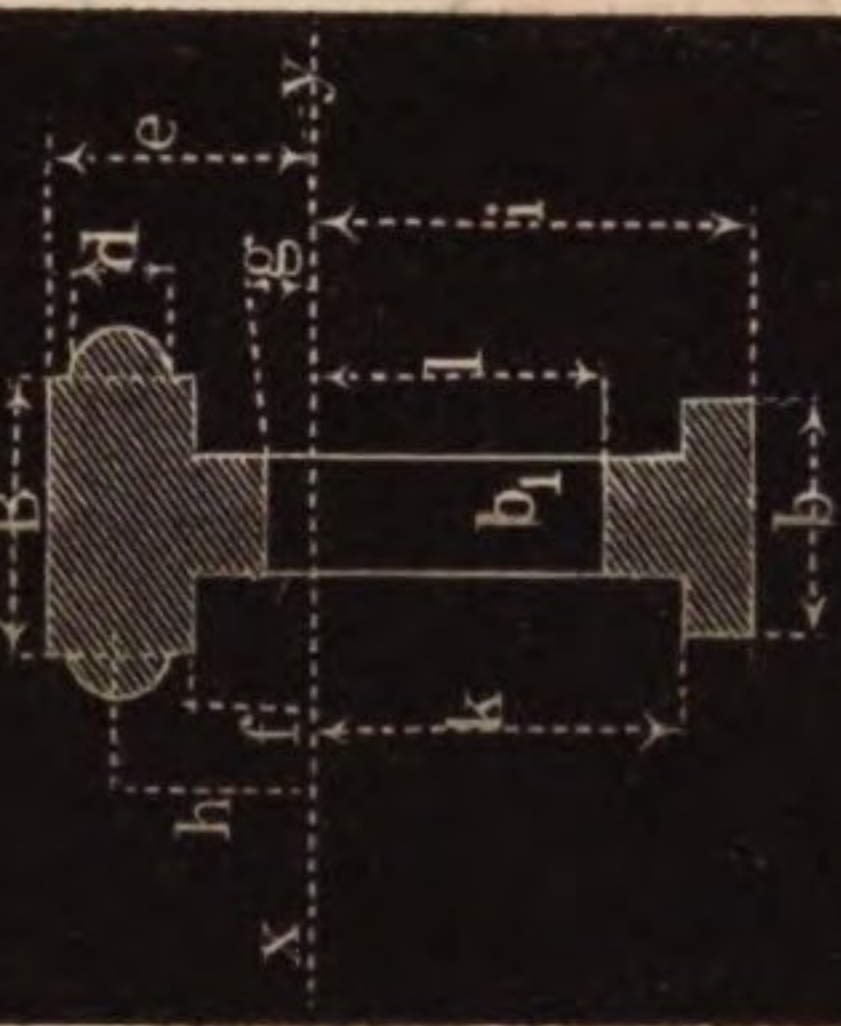
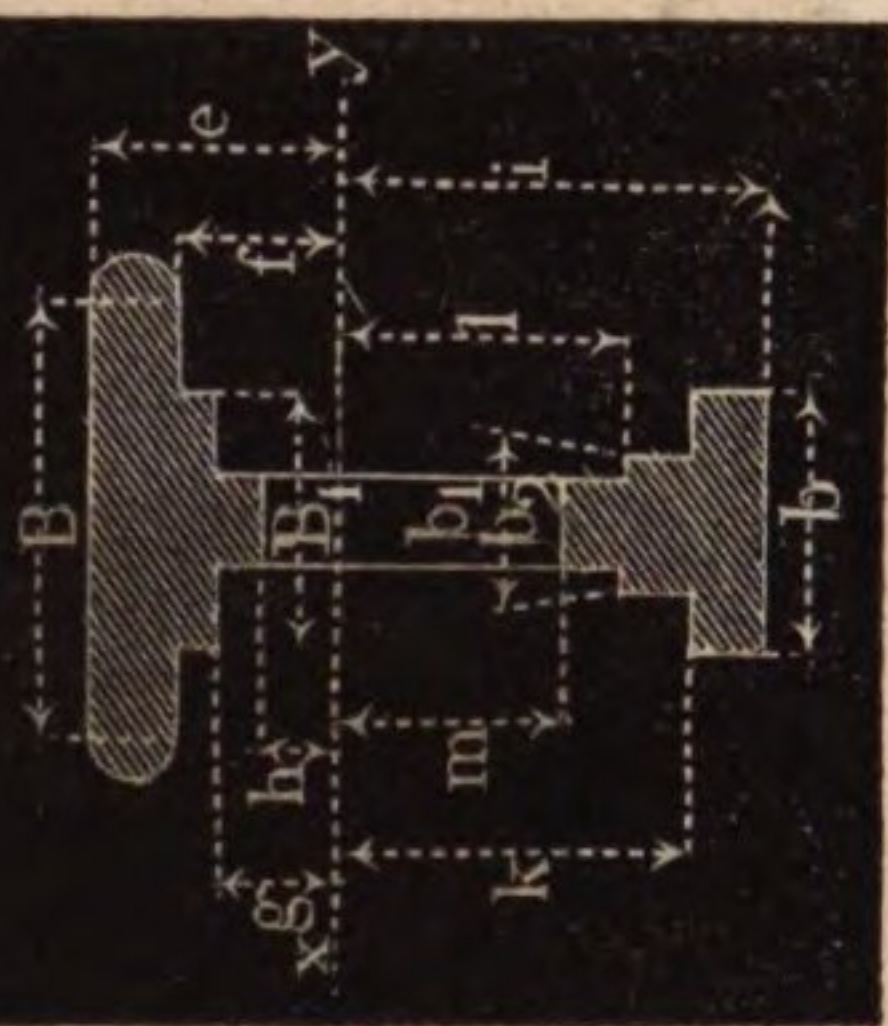
15.

Ausser den in voriger Tabelle zusammengestellten Querschnittformen kommen noch häufig einachsigsymmetrische Querschnitte zur Anwendung. Für einige derselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

- 1) das Trägheitsmoment T , bezogen auf die neutrale Achse xy des Querschnittes;
- 2) für die drei ersten Querschnitte den durch die Dimensionen derselben ausgedrückten Abstand a der stärkst gespannten Faser von der neutralen Achse xy . Für die übrigen Querschnitte werden solche Ausdrücke von a so complicirt, dass man besser thut, den Werth von a statt auf dem Wege der Rechnung durch ein, in §. 21 zu erwähnendes praktisches Verfahren zu bestimmen;
- 3) der Flächeninhalt F jedes Querschnittes.

Diejenigen Dimensionen zur Bestimmung der Trägheitsmomente, welche normal zur neutralen Achse stehen, sind von xy aus gemessen, wodurch die Ausdrücke für T verhältnissmässig die einfachste Gestalt annehmen. Hat man a und damit die Lage der neutralen Achse durch Rechnung oder durch das weiter unten zu besprechende praktische Verfahren bestimmt so lässt sich T berechnen und daraus durch den Quotienten $\frac{T}{a}$ der Querschnittmodul Z finden.

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment I .	a .	Flächeninhalt F .
XV.		$\frac{1}{36} b h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{b h}{2}$
XVI.		$\frac{1}{3} [B(e^3 - f^3) + b(f^3 + g^3)]$	$\frac{1}{2} \left(\frac{B(e-f)^2 + b(f+g)^2}{B(e-f) + b(f+g)} + \frac{2 B(e-f)(f+g)}{B(e-f) + b(f+g)} \right)$	$B(e-f) + b(f+g)$
XVII.		$\frac{1}{3} B(e^3 - f^3) + b_1(f^3 + h^3) + b(g^3 - h^3)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{B(e-f)^2 + b_1(f+h)^2}{B(e-f) + b_1(f+h) + b(g-h)} + \frac{2[B(e-f)(f+g) + b_1(f+h)(g-h)]}{B(e-f) + b_1(f+h) + b(g-h)} \right)$	$B(e-f) + b_1(f+h) + b(g-h)$
XVIII.		$\frac{1}{12} \frac{b_1 - b}{f+g} (g^4 - f^4) + \frac{1}{3} B(e^3 - f^3) + b(f^3 + g^3)$	—	$B(e-f) + (f+g) \frac{b_1 + b}{2}$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment T .	Flächeninhalt F .
XIX.		$\frac{1}{3} [B(e^3 - f^3) + b_1(f^3 - g^3 + i^3 - k^3) + b(h^3 - i^3)]$	$B(e - f) + b_1(f - g + i - k) + b(h - i)$
XX.		$\frac{1}{3} [B(e^3 - f^3) + b_1(f^3 - g^3 + k^3 - l^3) + b(i^3 - k^3)] + \frac{\pi}{64} (d^4 + 16d^2h^2)$	$B(e - f) + b_1(f - g + k - l) + b(i - k) + \frac{\pi}{4} d^2$
XXI.		$\frac{1}{3} [B(e^3 - f^3) + B_1(f^3 - g^3) + b_1(g^3 - h^3 + l^3 - m^3) + b_2(k^3 - l^3) + b(i^3 - k^3)] + \frac{\pi}{64} [(e - f)^4 + 4(e^2 - f^2)^2]$	$B(e - f) + B_1(f - g) + b_1(g - h + l - m) + b_2(k - l) + b(i - k) + \frac{\pi}{4} (e - f)^2$

16.

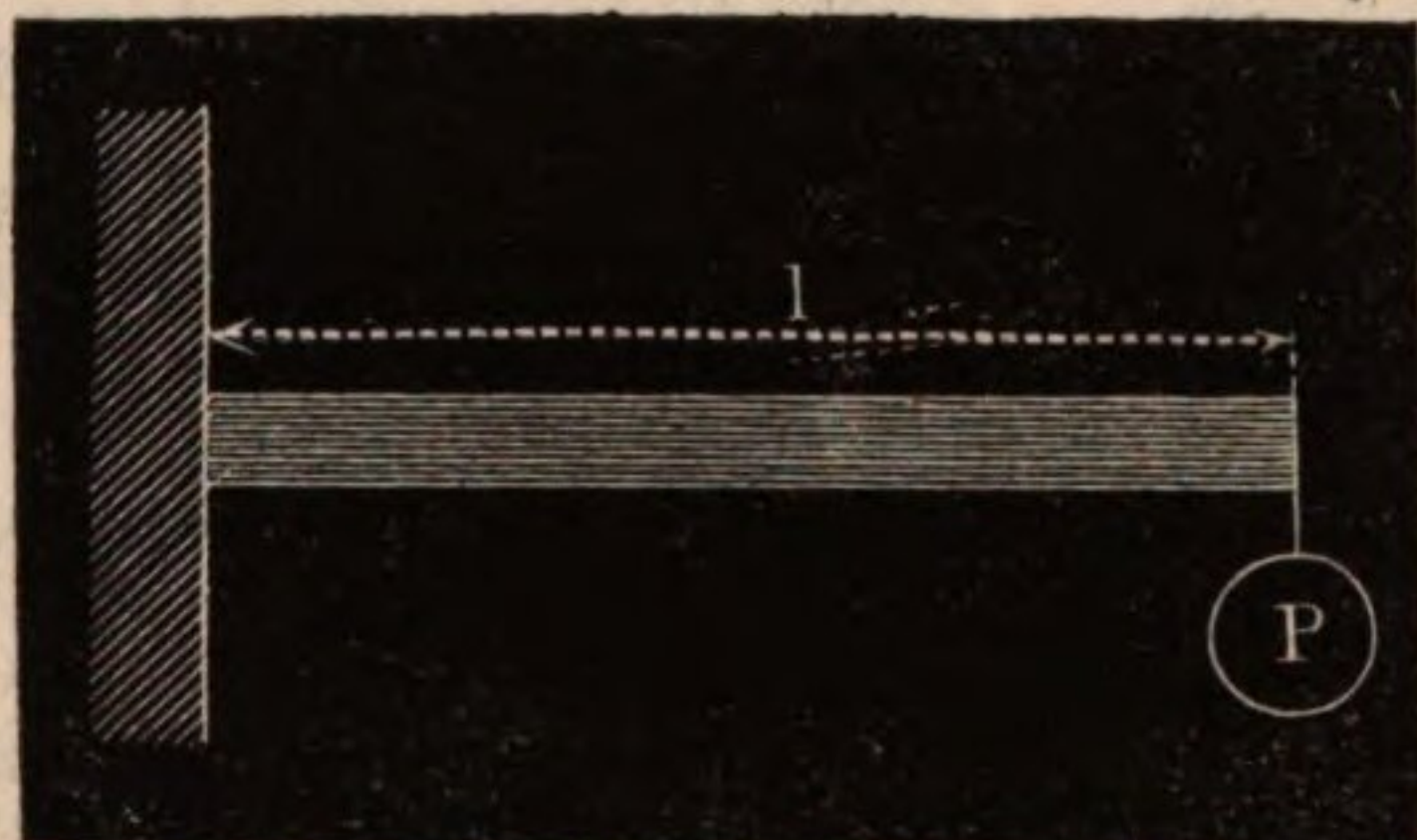
Biegungsfestigkeit stabförmiger Körper.

Denjenigen normalen Querschnitt eines prismatischen Körpers, für welchen in Folge einer Biegung das Elasticitätsmoment M grösser wird, als für jeden anderen normalen Querschnitt desselben Körpers, und in dem bei immer grösser werdender Biegung endlich der Bruch erfolgen würde, nennen wir, nach Poncelet, den gefährlichen Querschnitt des Körpers. Ist die Festigkeit eines Körpers für diesen Querschnitt gesichert, so ist sie es für den ganzen Körper.

Die folgenden Formeln enthalten für verschiedene Fälle die Gleichgewichtsbedingungen zwischen dem Elasticitätsmoment des gefährlichen Querschnittes prismatischer Stäbe und den statischen Momenten der äusseren auf Biegung wirkenden Kräfte.

Wenn $\mathfrak{S}$ die grösste Spannung (auf die Flächeneinheit) bezeichnet, welche in Folge der durch die Last P und das eigene Gewicht p des Stabes bewirkten Biegung in dem gefährlichen Querschnitt eines prismatischen Stabes eintritt, so ist:

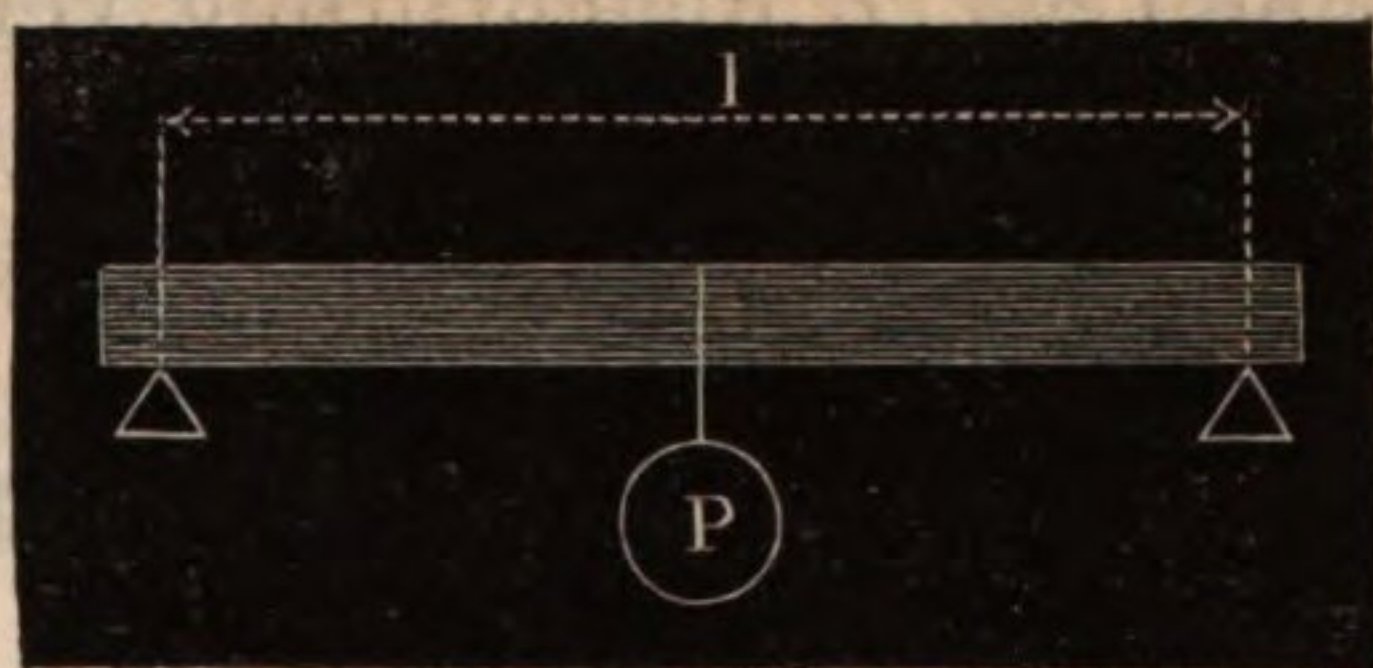
Fig. 5.



- a) Für einen Stab von der Länge l , welcher an einem Ende befestigt und an dem anderen mit einem Gewicht P belastet ist:

$$\mathfrak{S}Z = Pl + \frac{1}{2} pl \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (19)$$

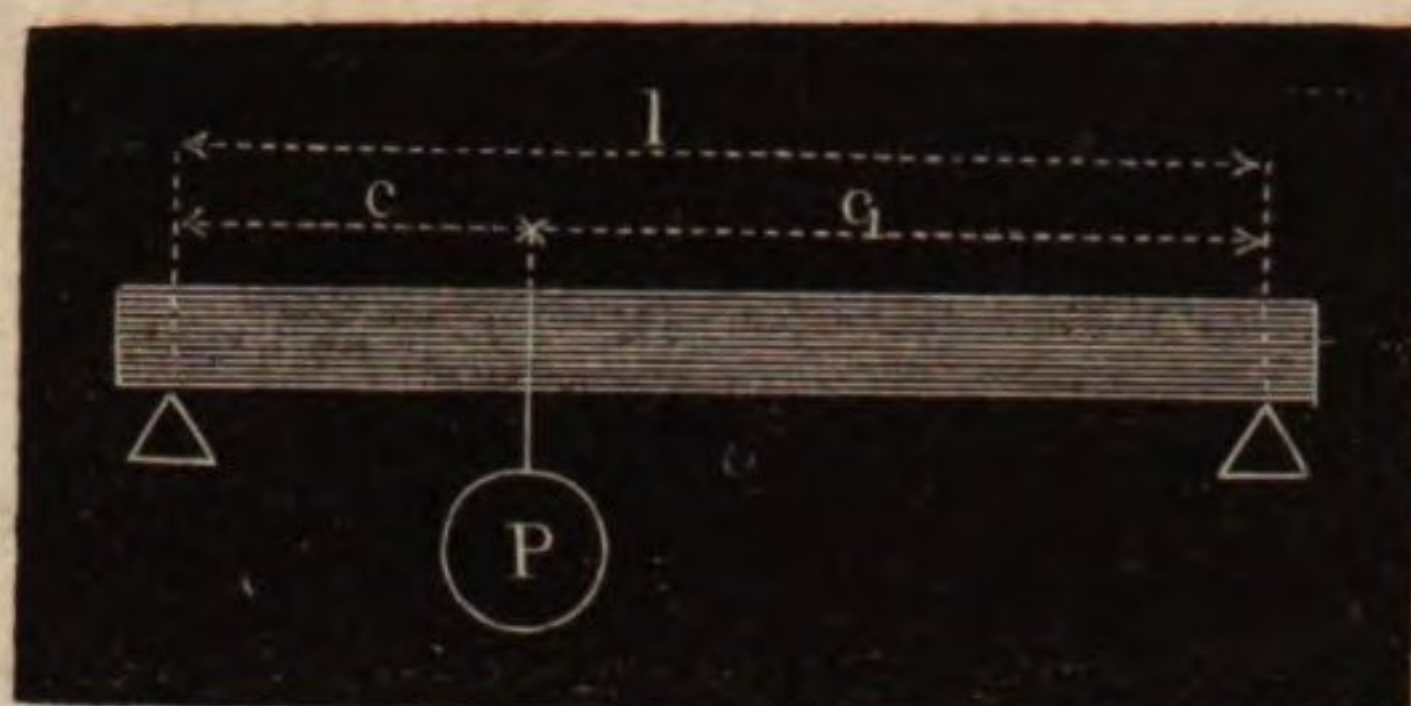
Fig. 6.



- b) Für einen Stab von der Länge l , welcher an beiden Enden aufliegt und in der Mitte mit einem Gewicht P belastet ist:

$$\mathfrak{S}Z = \frac{1}{4} Pl + \frac{1}{8} pl \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (20)$$

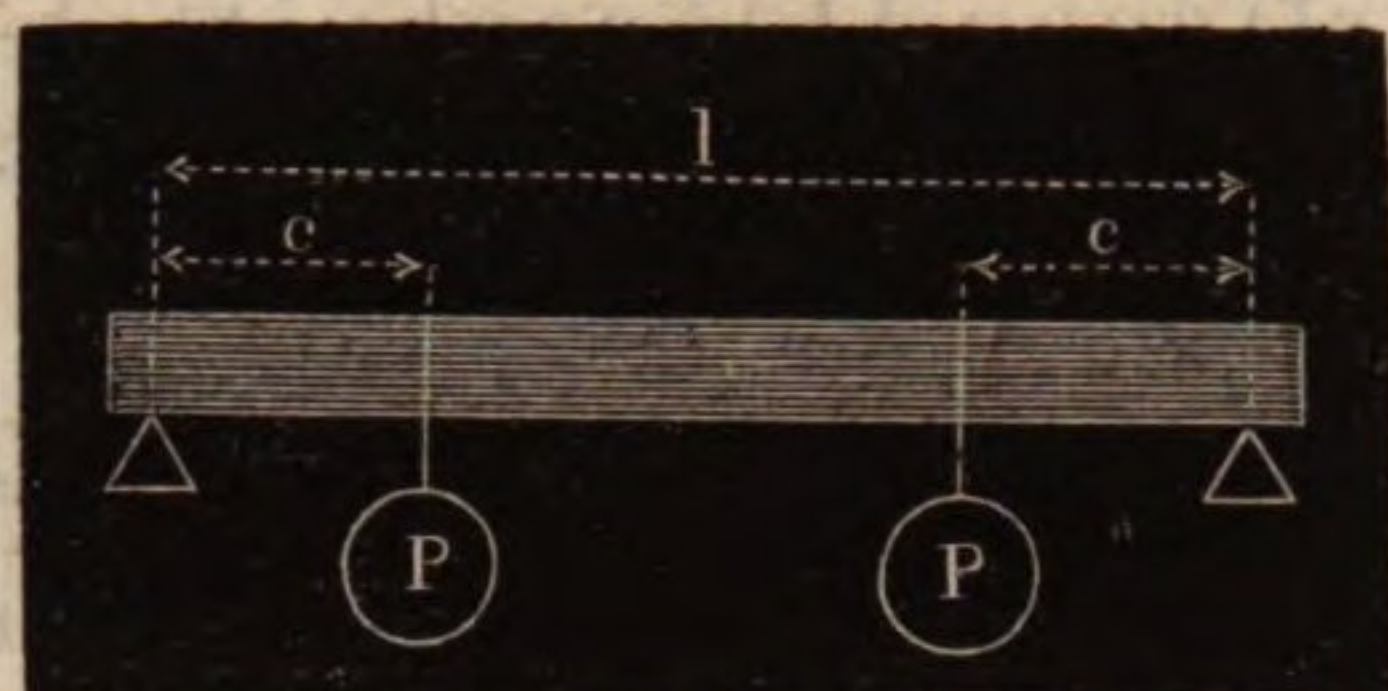
Fig. 7.



c) Für einen Stab von der Länge l , welcher mit beiden Enden aufliegt und mit einem Gewicht P belastet ist, welches um c und c_1 von den Stützpunkten entfernt ist:

$$\mathfrak{S}Z = \frac{cc_1}{l} \left(P + \frac{p}{2} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot (21)$$

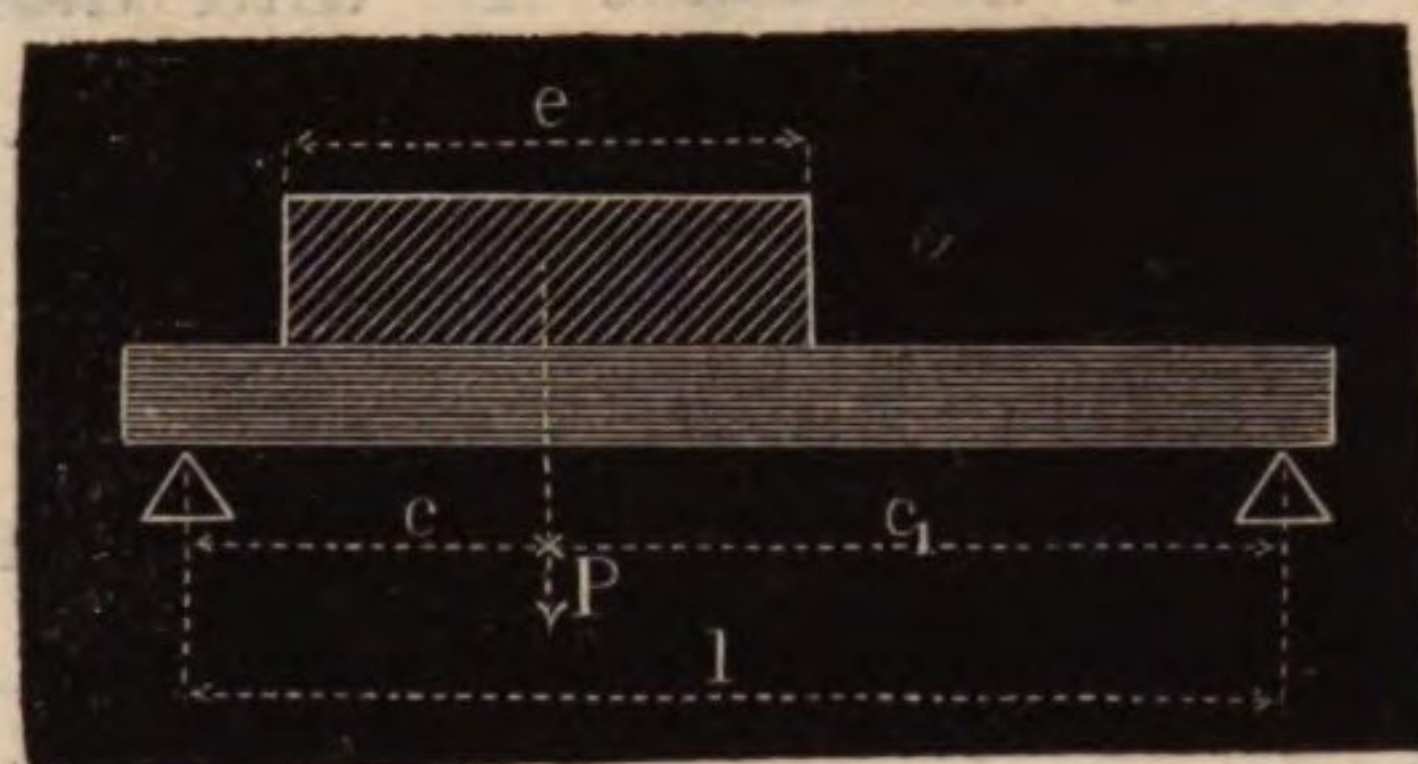
Fig. 8.



d) Für einen Stab von der Länge l , welcher mit beiden Enden aufliegt und in einer Entfernung c von jedem Stützpunkte mit einem Gewicht P belastet ist:

$$\mathfrak{S}Z = Pc + \frac{1}{8} pl \cdot \cdot \cdot \cdot (22)$$

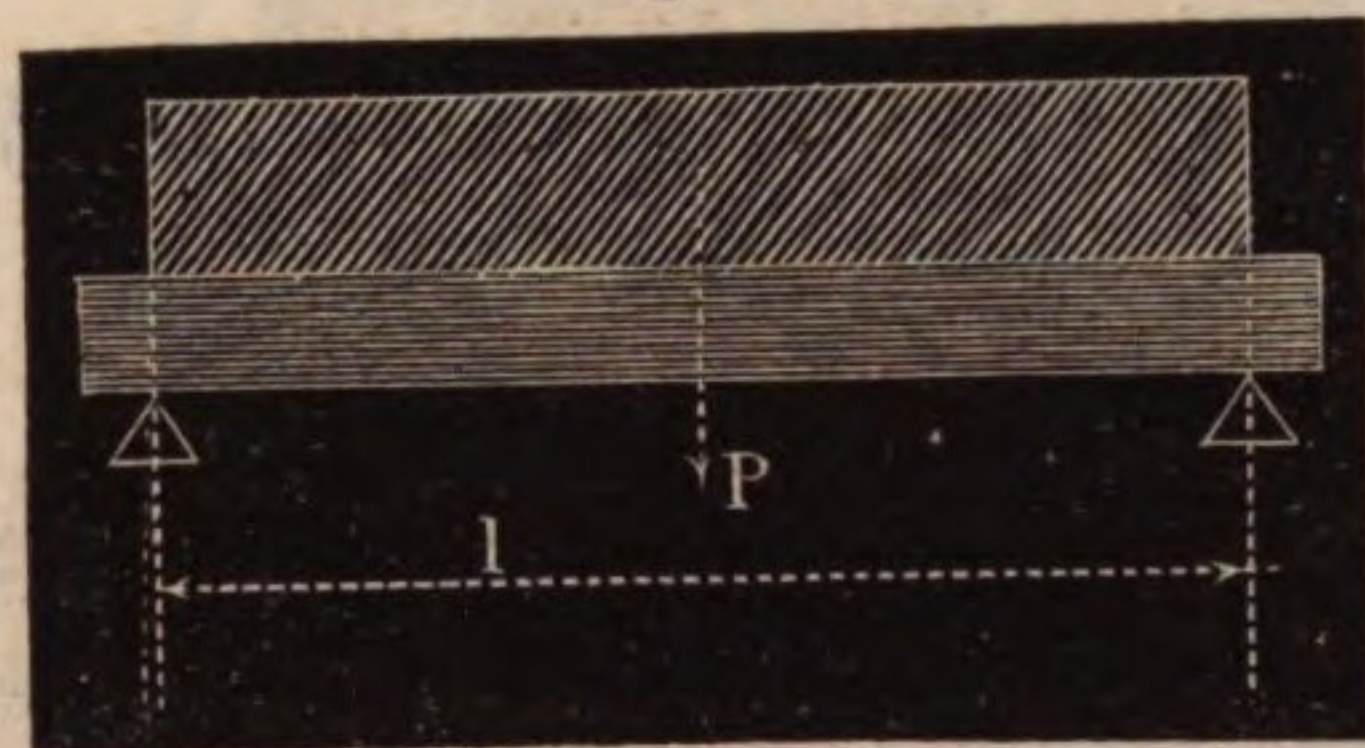
Fig. 9.



e) Für einen Stab von der Länge l , auf welchen eine auf eine Länge e gleichmässig vertheilte Last P drückt, deren Schwerpunkt um c und c_1 von den beiden Unterstützungspunkten entfernt ist:

$$\mathfrak{S}Z = P \left(\frac{cc_1}{l} - \frac{e}{8} \right) + \frac{p}{2} \cdot \frac{cc_1}{l} \cdot \cdot \cdot (23)$$

Fig. 10.



f) Für einen Stab von der Länge l , über dessen ganze Länge eine Last P gleichförmig vertheilt ist:

$$\mathfrak{S}Z = \frac{l}{8} (P + p) \cdot \cdot \cdot \cdot (24)$$

Bei der Berechnung der im Maschinenbau vorkommenden Constructionstheile kann man fast immer deren Eigengewicht vernachlässigen, wodurch denn aus den obigen Formeln der mit

p behaftete Ausdruck herausfällt. Die Gleichungen (21) und (23) gelten nur annähernd für den gefährlichen Querschnitt des Stabes; man kann sie jedoch, ohne einen grossen Fehler zu begehen, gebrauchen, wenn entweder c und c_1 beliebig verschieden, aber $\frac{P}{p}$ sehr gross, oder wenn $\frac{P}{p}$ klein, aber dabei c und c_1 wenig verschieden sind.

In den meisten Fällen, wo von den Formeln (19) bis (24) Gebrauch gemacht wird, geschieht dies in der Absicht, die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes eines auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Körpers so zu bestimmen, dass, wenn die Spannung $\mathfrak{S}$ in der stärkst gespannten Faser des gefährlichen Querschnittes eintritt, das Elasticitätsmoment des Letzteren gleich sei dem statischen Moment der biegenden Kraft. Die zu bestimmenden Querschnittsdimensionen kommen aber in den Gleichungen (19) bis (24) nicht direct vor, sondern nur unter der Form des Querschnittmoduls Z . Um daher die gewünschten Dimensionen bestimmen zu können, muss man sich zuvörderst über die Querschnittform entscheiden, und dann den für die gewählte aus §. 14 oder 15 zu entnehmenden Werth von Z in die betreffende Gleichung einsetzen. Ist z. B. der gewählte Querschnitt ein Rechteck, so hat man statt Z (siehe Nro. I. §. 14) $\frac{1}{6} b h^2$ einzusetzen; ist der Quer-

schnitt ein Kreis, so hat man statt Z zu setzen $\frac{\pi}{32} d^3$ (siehe Nro. VI. §. 14). Bei Benutzung eines der Werthe von Z aus den Tabellen §. 14 und 15 hat man genau darauf zu achten, ob in dem zu berechnenden Querschnitt die Lage der neutralen Achse in Bezug zum Querschnitt auch identisch sei mit der Lage der in den Querschnittformen der Tabellen angegebenen neutralen Achse xy ; denn nur in diesem Falle können die (nur in Bezug auf die angegebene Lage von xy berechneten) Werthe T und Z der Tabellen zu richtigen Resultaten führen.

Da man zur Bestimmung der Dimensionen in jedem Falle nur eine Gleichung hat, so darf auch in dem Ausdruck, den

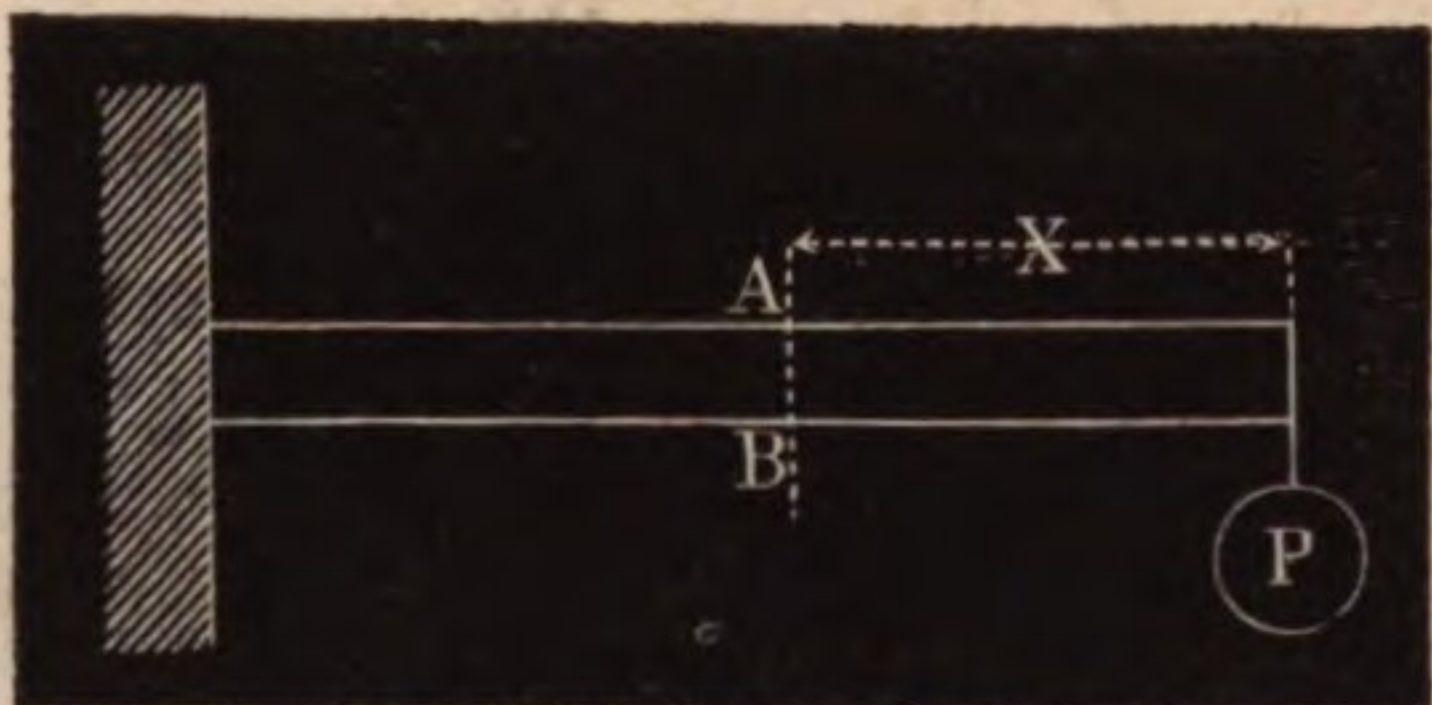
man für Z in eine der Gleichungen (19) bis (24) einführt, nur eine Unbekannte vorkommen. Kommen daher, wie dies bei sehr vielen Querschnittsformen der Fall ist, in einem Ausdruck für Z mehrere Dimensionen vor, so muss man dieselben entweder auf eine unter ihnen beziehen, oder bis auf eine als absolute Grössen annehmen. (Bei einzelnen complicirten Formeln für Z ist es manchmal auch dann noch schwierig, die Gleichung aufzulösen; man kommt dann durch versuchsweises Einsetzen von numerischen Werthen für alle Dimensionen am besten zum Ziel.) Wenn der Querschnitt ein Rechteck ist, wofür $Z = \frac{1}{6} b h^2$, so muss man entweder $b = \alpha h$, z. B. $b = \frac{1}{4} h$ setzen, wodurch $Z = \frac{1}{24} h^3$ würde, oder man hat für b einen absoluten Werth, z. B. 3, anzunehmen, wodurch $Z = \frac{1}{2} h^2$ würde; in beiden Fällen enthält Z nur noch die Unbekannte h , welche dann aus der betreffenden Gleichung unter (19) bis (24) bestimmt werden kann.

17.

Körperformen von gleicher Biegefestigkeit.

Wenn ein stabförmiger Körper (Fig. 11) an einem Ende befestigt und am anderen durch das Gewicht P belastet ist, so

Fig. 11.



findet nach §. 12 Gleichgewicht statt zwischen den Molekularkräften des Stabes und der biegenden Kraft P , wenn für jeden Querschnitt das Elasticitätsmoment desselben gleich ist dem Moment der Kraft P ,

bezogen auf die neutrale Achse desselben Querschnittes. Ist daher das Elasticitätsmoment des Querschnittes bei AB (Fig. 11) gleich M , so muss für den Gleichgewichtszustand der äusseren und inneren Kräfte

$$M = P x$$

sein.

Da nach §. 13 $M = \mathfrak{S}Z$ ist, so ist auch:

$$\mathfrak{S}Z = Px \dots \dots \dots (25)$$

Bei einem prismatischen Stabe sind alle normalen Querschnitte congruent, und es hat Z für alle diese Querschnitte einen und denselben Werth; es muss sich daher in den Querschnitten von dem gefährlichen aus bis zu dem Angriffspunkt der Kraft P die stärkste Spannung $\mathfrak{S}$ der von der neutralen Achse jedes Querschnittes entferntesten Faser in directem Verhältniss mit x ändern.

In der Nähe des Angriffpunktes der Kraft P wird also $\mathfrak{S}$ seinem kleinsten Werthe nahe sein; dagegen wird $\mathfrak{S}$ in demjenigen Querschnitt zu einem relativen Maximum werden, für welchen x den grössten Werth annimmt; Letzteres findet Statt für den Querschnitt an der Befestigungsstelle, welcher deshalb in dem vorliegenden Falle der gefährliche Querschnitt ist.

Hinsichtlich des Materialaufwandes wird es aber offenbar am vortheilhaftesten sein, wenn man dem Körper (Fig. 11) eine solche Form giebt, dass er in allen Normalquerschnitten dem Momente Px gleiche Festigkeit entgegensetzt, in welchem Falle der Körper keinen gefährlichen Querschnitt mehr hat. Man kann dies dadurch erreichen, dass man die Querschnitte vom freien Ende des Stabes bis zur Befestigungsstelle in der Weise stetig zunehmen lässt, dass die stärkste Spannung $\mathfrak{S}$, welche in jedem Normalquerschnitt eintritt, in allen gleich gross wird.

Unter dieser Bedingung sind in Gleichung (25) $\mathfrak{S}$ und P als constant zu betrachten, und es muss nicht mehr $\mathfrak{S}$, sondern Z in directem Verhältniss mit x veränderlich sein. Man kann daher Z für jeden angenommenen Werth von x aus der Gleichung:

$$x \frac{P}{\mathfrak{S}} = Z \dots \dots \dots (26)$$

finden, in welcher bedeutet:

x die Entfernung des Querschnittes, für welchen Z bestimmt werden soll, von dem Angriffspunkt der Kraft P ;
 P die biegende Kraft;

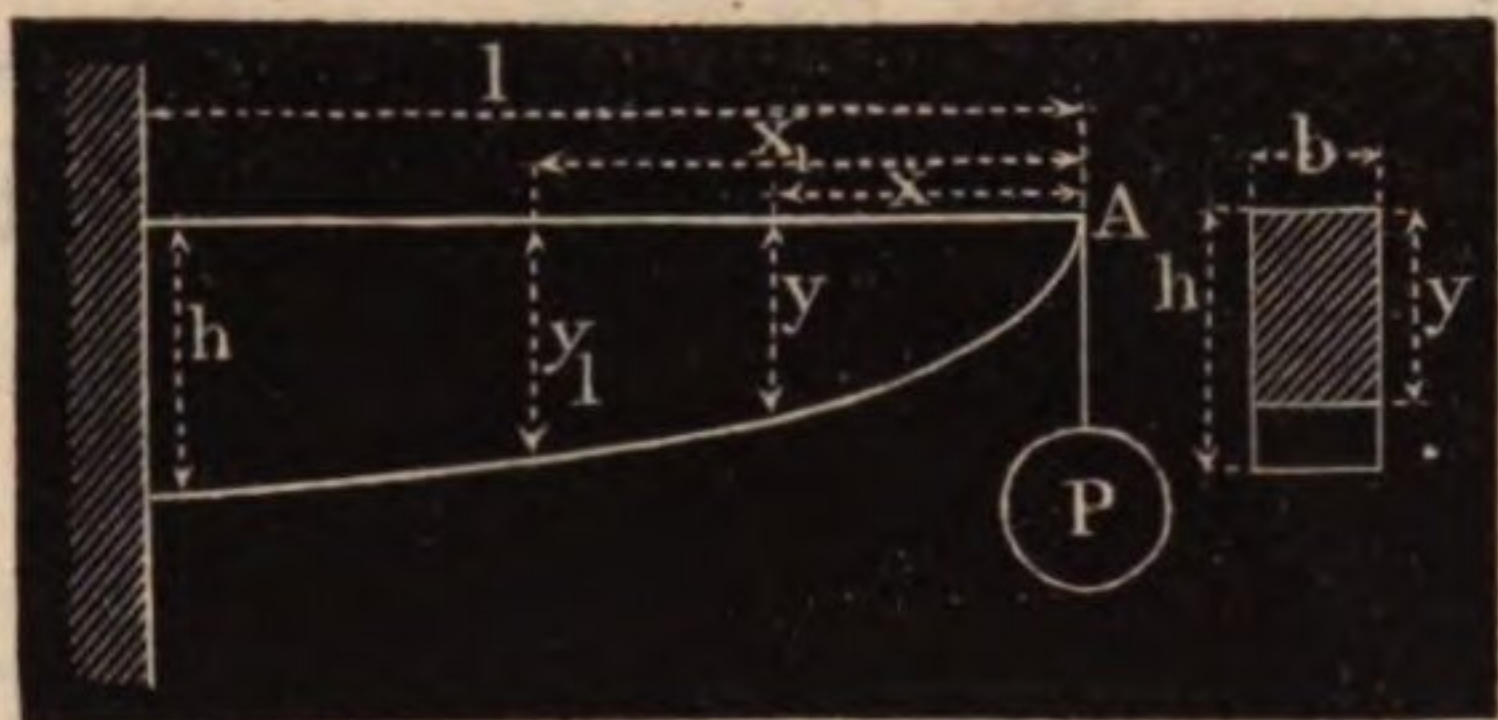
§ die stärkste Spannung (auf die Flächeneinheit), welche in der von der neutralen Achse entferntesten Faser in jedem Normalquerschnitt des Stabes eintritt.

Will man die Gleichung (26) auf stabförmige Körper von bestimmter Querschnittform anwenden, so muss für Z der (aus §. 14 oder 15 zu entnehmende) entsprechende Werth gesetzt werden und drückt die Gleichung dann die Beziehung zwischen x und den Dimensionen des Querschnittes aus. Sind dieser Dimensionen mehrere, so müssen sie, wie schon früher bemerkt, entweder auf eine bezogen, oder ausser einer als absolute Werthe angenommen werden.

Da man jeden Fall der Beanspruchung auf Biegefestigkeit auf den zurückführen kann, dass ein Körper an einem Ende befestigt und am anderen belastet ist, so sind auch nur für diesen Fall in den folgenden Formeln für einige häufig angewandte Querschnittformen die Beziehungen zwischen dem Hebelarm x der biegenden Kraft und den Dimensionen des entsprechenden Querschnittes aufgestellt.

18.

Fig. 12.



a) Alle normalen Querschnitte seien Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y . Dann ist:

$$\frac{P}{\S} x = Z = \frac{1}{6} b y^2 \quad \dots \quad (27)$$

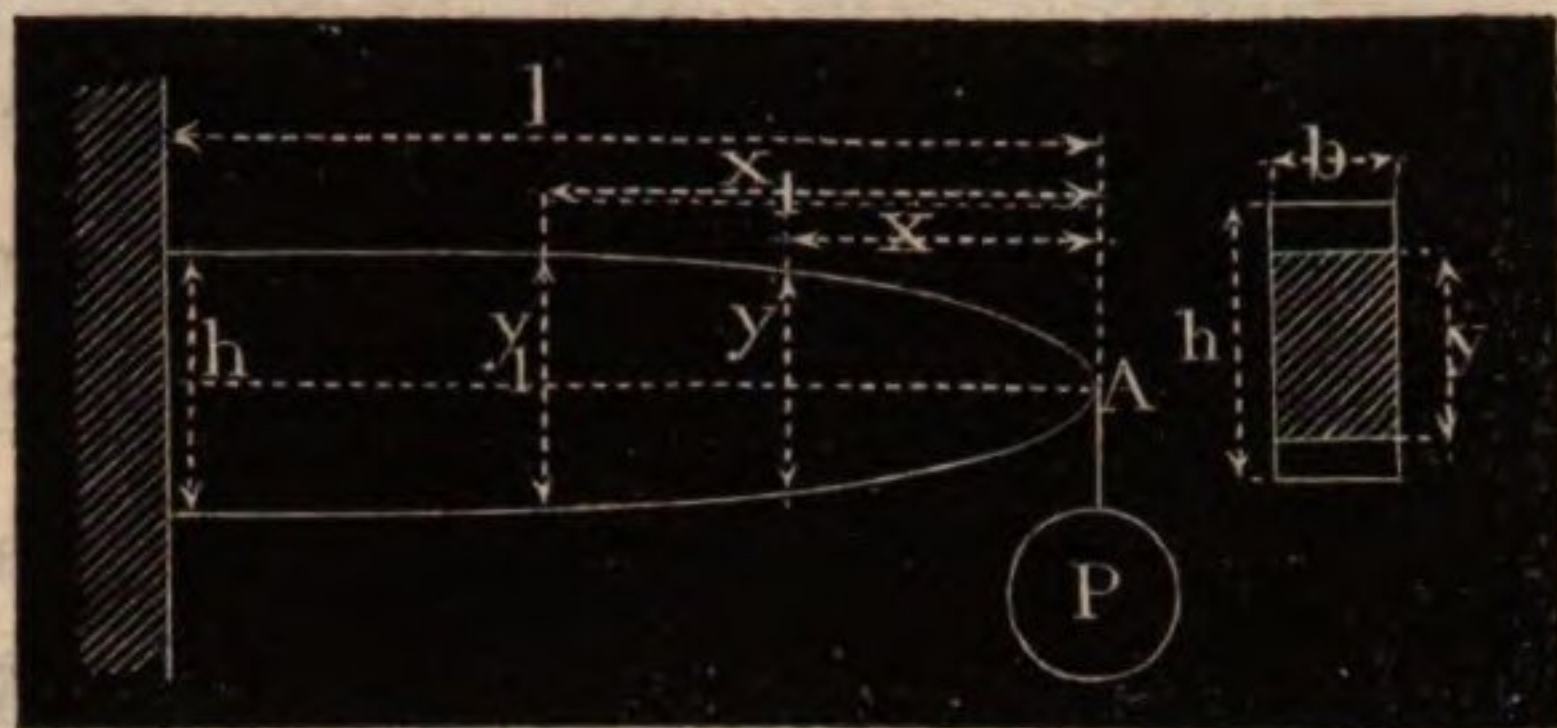
woraus:

$$y = \sqrt{\frac{6 P}{b \S} \cdot x} \quad \dots \quad (28)$$

Die Abhängigkeit zwischen x und y ist die, welche zwischen den Coordinaten einer quadratischen Parabel stattfindet. Legt man daher (wie in Fig. 12) die einen Endpunkte sämtlicher y in eine gerade Linie, so bilden die anderen Endpunkte eine quadratische Parabel, deren Parameter $= \frac{6 P}{b \S}$.

Legt man dagegen die Mittelpunkte sämtlicher y in eine

Fig. 13.



gerade Linie (wie in Fig. 13), so liegen beide Endpunkte der y in den beiden Zweigen einer quadratischen Parabel von dem Parameter $\frac{1}{4} \frac{6P}{b\mathfrak{E}}$. Setzt man in

Gleichung (28) $x = l$, so erhält man als Höhe des Rechtecks an der Befestigungsstelle:

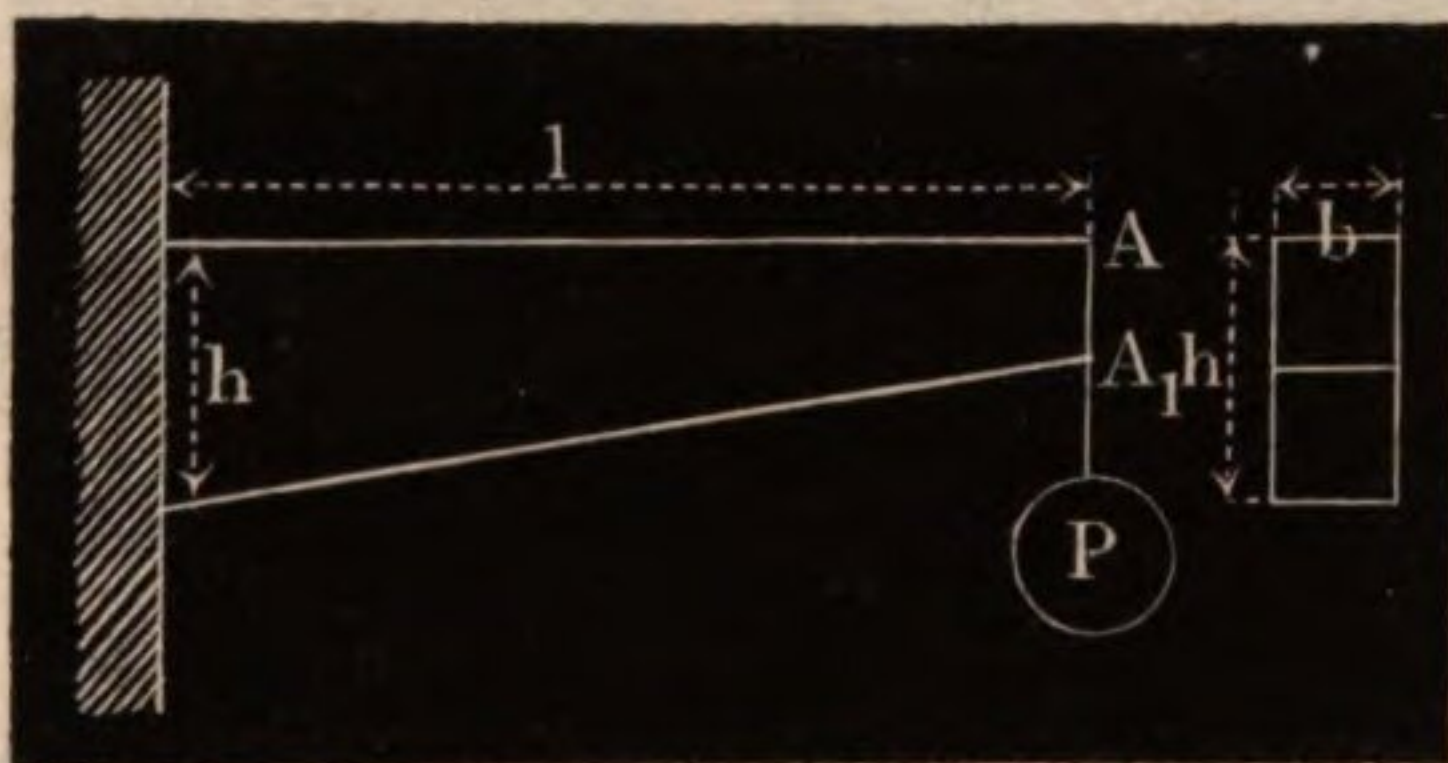
$$h = \sqrt{\frac{6P}{b\mathfrak{E}} \cdot l} \quad \dots \quad (29)$$

Aus Gleichung (28) folgt, dass sich zwei Höhen y und y_1 zu einander verhalten, wie $\sqrt{x} : \sqrt{x_1}$, so dass:

$$y = y_1 \sqrt{\frac{x}{x_1}} = h \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \dots \quad (30)$$

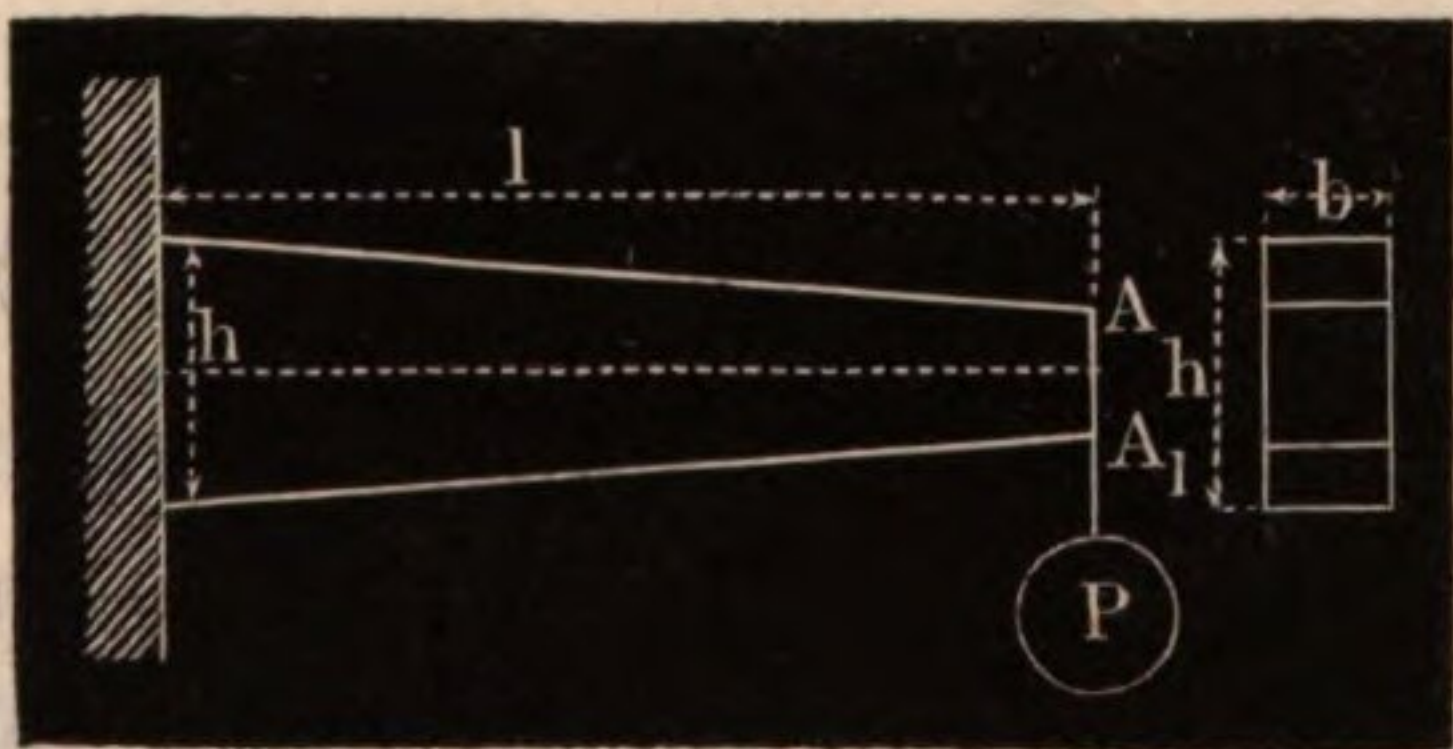
Man erhält Formen, welche als Annäherungen an die genauen Formen in Fig. 12 und Fig. 13 betrachtet werden können,

Fig. 14.



wenn man, wie in Fig. 14 und Fig. 15, bei constanter Breite b die Höhe AA_1 des Rechtecks am freien Ende $= \frac{h}{2}$ nimmt.

Fig. 15.



b) Ueber einen Körper, der an einem Ende befestigt ist, sei eine Last gleichförmig vertheilt, und es seien alle normalen Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y . Wenn die Belastung auf die Längeneinheit $= q$, so ist:

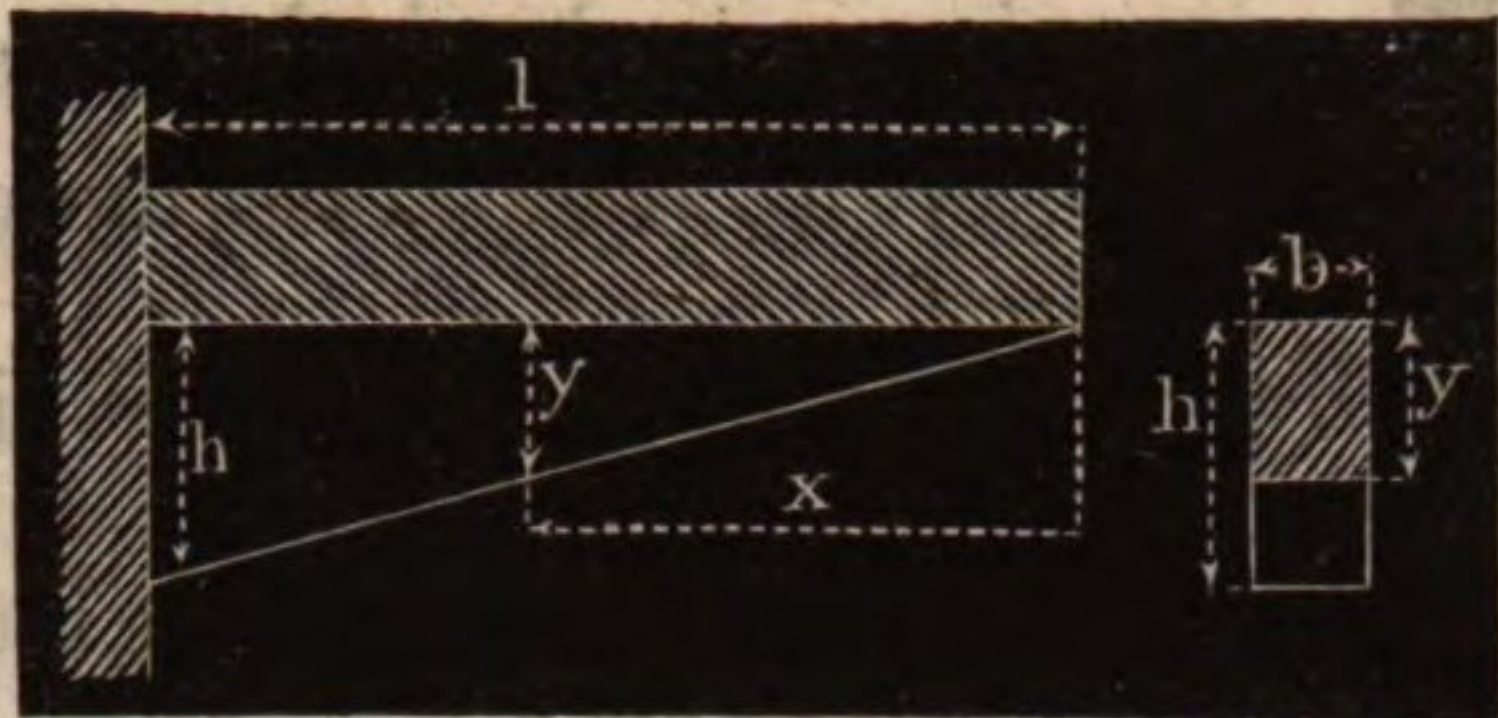
$$\frac{qx^{\frac{x}{2}}}{\mathfrak{E}} = Z = \frac{1}{6} b y^2 \quad \dots \quad (31)$$

und hieraus:

$$y = x \sqrt{\frac{3q}{b\mathfrak{E}}} \quad \dots \quad (32)$$

Die Abhängigkeit zwischen x und y ist die, welche

Fig. 16.



zwischen den Koordinaten einer geraden Linie stattfindet, und da für $x=0$ auch $y=0$ wird, so ist der durch Gleichung (32) bestimmte Längenschnitt ein Dreieck (Fig. 16). Ist die Länge des Körpers $= l$ und

die Höhe des Querschnittes an der Befestigungsstelle $= h$, so hat man auch:

$$h = l \sqrt{\frac{3q}{b\mathfrak{E}}} \quad \dots \quad (33)$$

und

$$y = \frac{x}{l} h$$

c) Alle normalen Querschnitte seien ähnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z ; das Verhältniss

$\frac{z}{y} = \alpha$. Dann ist:

$$x \frac{P}{\mathfrak{E}} = Z = \frac{1}{6} z y^2 = \frac{1}{6} \alpha y^3 \quad \dots \quad (34)$$

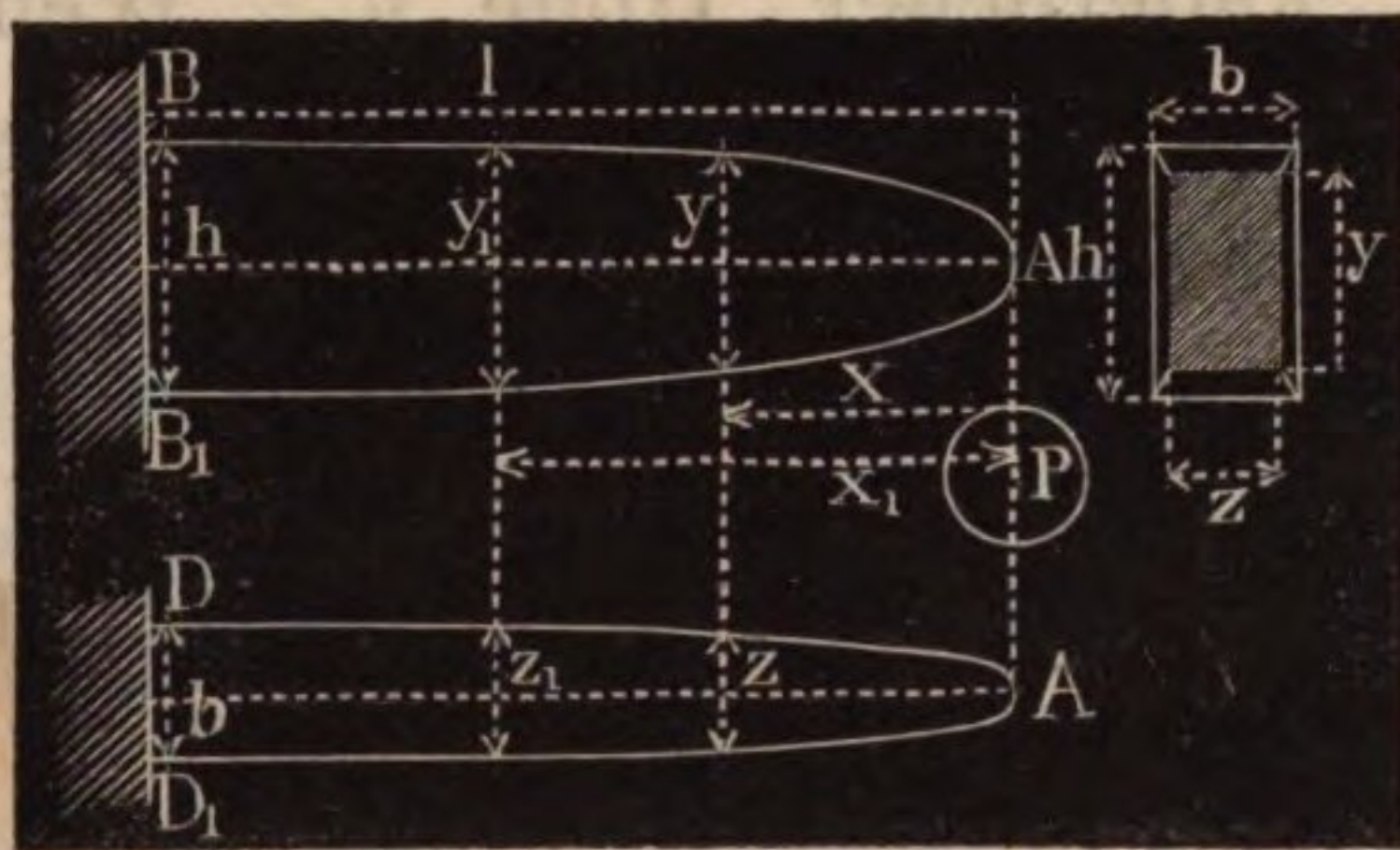
und hieraus:

$$y = \sqrt[3]{\frac{6P}{\mathfrak{E}\alpha} \cdot x} \quad \dots \quad (35)$$

und weil $z = \alpha y$:

$$z = \sqrt[3]{\frac{6P\alpha^2}{\mathfrak{E}} \cdot x} \quad \dots \quad (36)$$

Fig. 17.



Die Abhängigkeit, welche zwischen x und y und zwischen x und z stattfindet, ist die der Koordinaten einer cubischen Parabel. Die Linien BAB_1 und DAD_1 (Fig. 17) sind daher cubische Parabeln. Ist die Länge des Körpers $= l$, so

werden die Höhe h und die Breite b des Querschnittes an der Befestigungsstelle durch folgende Formeln gefunden:

$$\alpha = \frac{b}{h}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6P}{\alpha \mathfrak{S}} \cdot l}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{6P \alpha^2}{\mathfrak{S}} \cdot l} \quad (37)$$

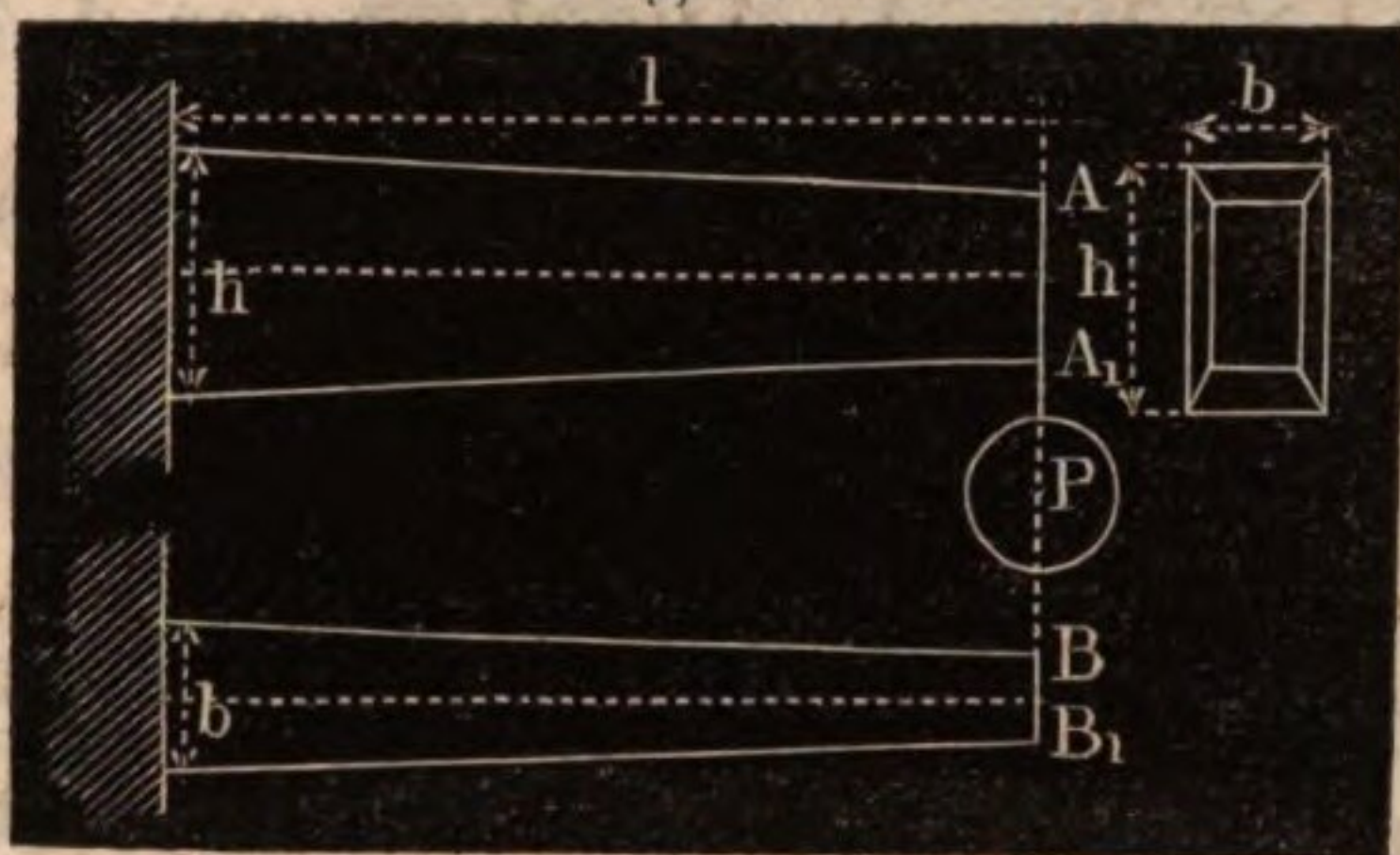
Aus den Gleichungen (35) und (36) folgt ferner, dass sich zwei Werthe y und y_1 , sowie z und z_1 zu einander verhalten wie

$$\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{x_1}, \text{ so dass:}$$

$$y = y_1 \sqrt[3]{\frac{x}{x_1}} = h \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad (38)$$

$$z = z_1 \sqrt[3]{\frac{x}{x_1}} = b \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad (39)$$

Fig. 18.



Eine Annäherung an die vorige Körperform giebt eine abgestumpfte Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (Fig. 18), wenn die Seiten $AA_1 = \frac{2}{3} h$ und $BB_1 = \frac{2}{3} b$ sind.

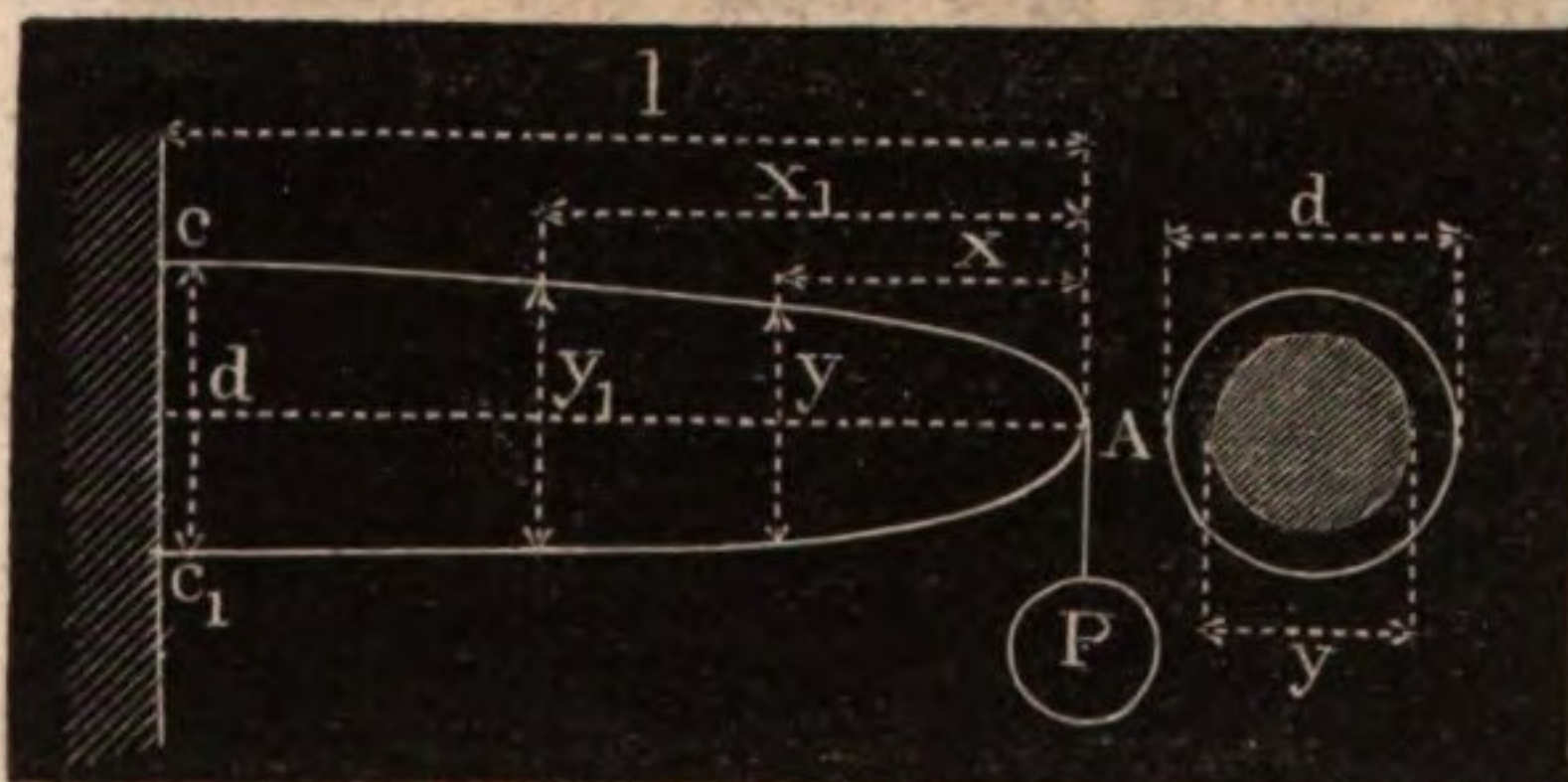
d) Alle zur neutralen Faser normalen Querschnitte seien Kreise vom Durchmesser y . Dann ist:

$$\frac{P}{\mathfrak{S}} x = Z = \frac{\pi}{32} y^3 \quad (40)$$

und hieraus:

$$y = \sqrt[3]{\frac{32P}{\pi \mathfrak{S}} \cdot x} \quad (41)$$

Fig. 19.



Die Abhängigkeit zwischen x und y ist die, welche zwischen den Coordinaten einer cubischen Parabel stattfindet. Die gesuchte Körperform ist daher die eines Rotationskörpers, dessen Oberfläche durch

Umdrehung einer cubischen Parabel entsteht (Fig. 19), deren Parameter $= \frac{1}{8} \frac{32}{\pi} \frac{P}{\mathfrak{S}}$.

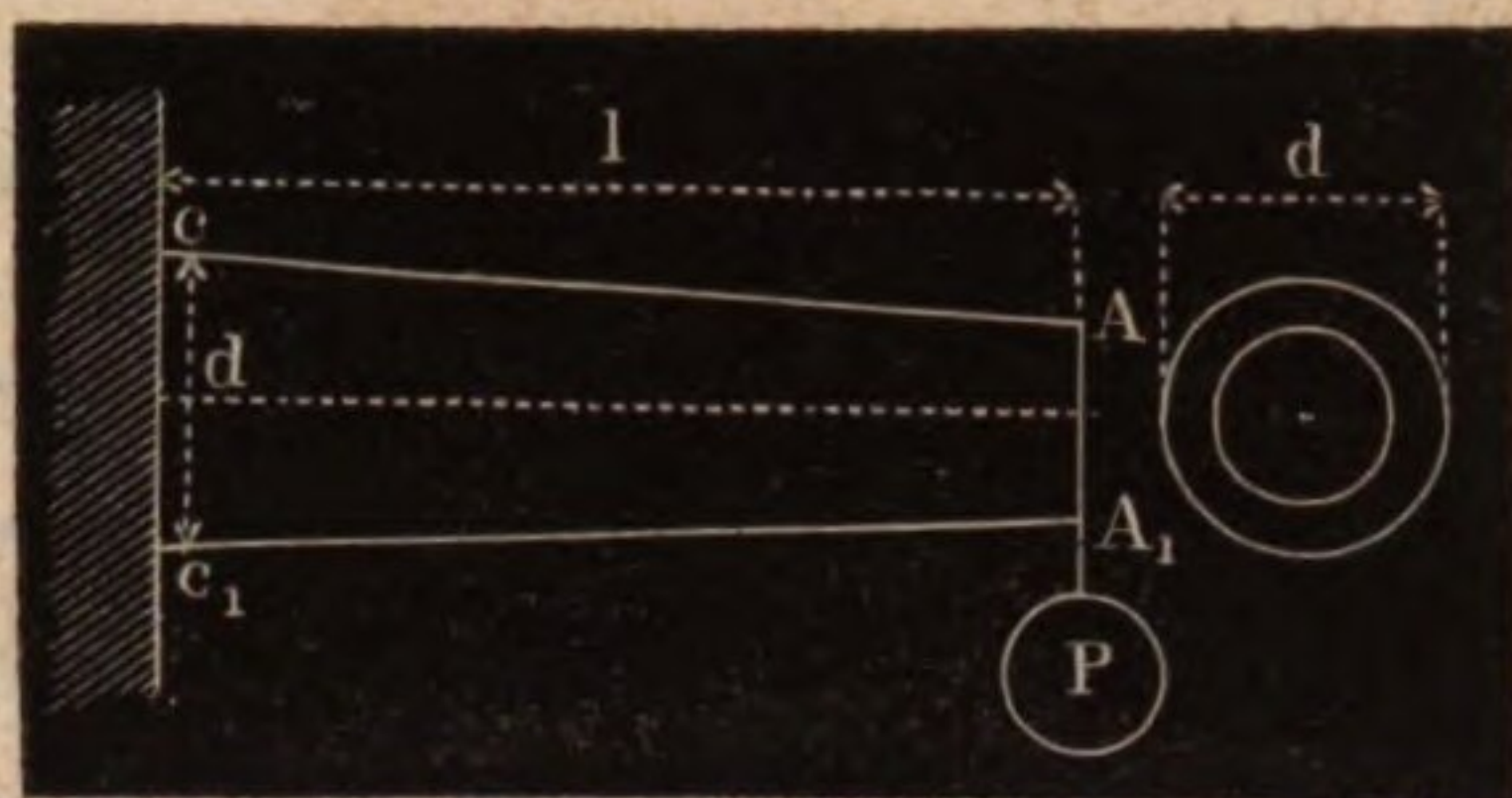
Ist die Länge des Körpers $= l$, so ist der Durchmesser d an der Befestigungsstelle

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 P}{\pi \mathfrak{S}} \cdot l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Aus Formel (41) folgt, dass sich zwei Durchmesser y und y_1 verhalten wie $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{x_1}$, so dass:

$$y = y_1 \sqrt[3]{\frac{x}{x_1}} = d \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Fig. 20.



Eine Annäherung an die obige Körperform giebt ein abgestumpfter Kegel (Fig. 20), bei dem der Durchmesser $A A_1$ der freien Endfläche $= \frac{2}{3} c c_1$.

19.

Ueber den grössten Werth von $\mathfrak{S}$, der in die Formeln zur Berechnung der Biegungsfestigkeit eingeführt werden darf.

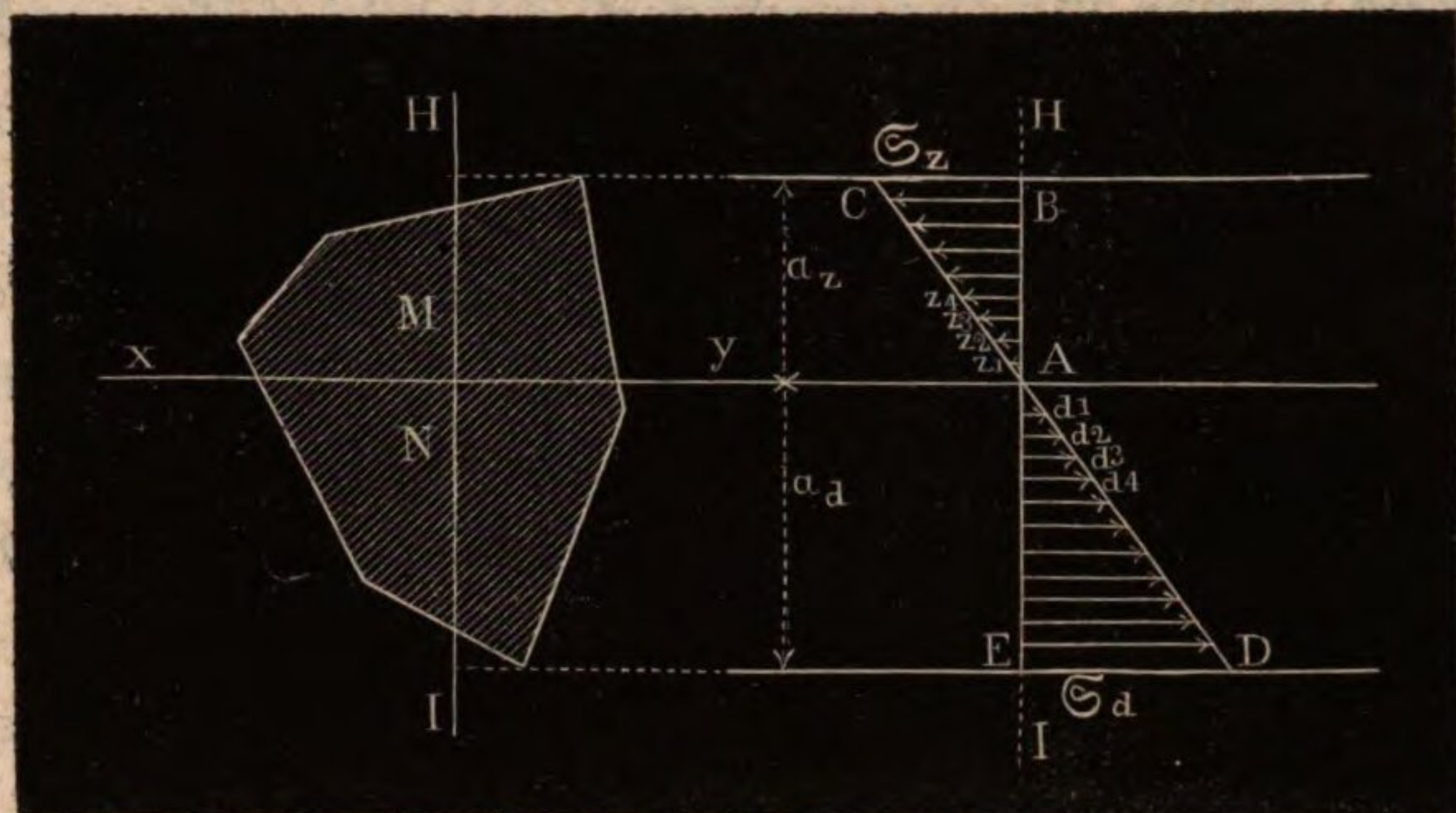
Die in den §§. 16, 17 und 18 aufgestellten Formeln haben nur dann volle Gültigkeit, wenn keine der in Folge der Biegung verlängerten oder verkürzten Fasern über die entsprechende Elasticitätsgrenze hinaus verlängert oder verkürzt wird. Der grösste zulässige Werth der Spannung $\mathfrak{S}$ muss daher ein solcher sein:

dass, wenn die Spannung $\mathfrak{S}$ in der von der neutralen Achse des gefährlichen Querschnittes (oder bei Körpern von gleicher Festigkeit in irgend einem Normalquerschnitt) entferntesten Faser eintritt, weder die Spannung in einer der verlängerten Fasern, d. h. in einer Faser der Zugseite, die stabile Zugfestigkeit des betreffenden Materials überschreite, noch auch die

Spannung in einer der Fasern der Druckseite grösser werde, wie die stabile Druckfestigkeit des Materials, aus welchem der Stab besteht.

Untersuchen wir nun, welchen grössten Werth $\mathfrak{S}$ in jedem Falle annehmen darf, ohne dass diese Bedingung verletzt werde. Es sei MN (Fig. 21) der gefährliche Querschnitt eines pris-

Fig. 21.



matischen Stabes; ferner seien xy die neutrale Achse, M die Zugseite und N die Druckseite desselben. Denkt man sich den Querschnitt parallel zu xy in sehr schmale Schichten getheilt, so müssen nach §. 12 die innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibenden Verlängerungen und Verkürzungen der in den verschiedenen Schichten liegenden Fasern sich verhalten wie die Abstände der entsprechenden Schichten von der neutralen Achse. Ferner sind nach Satz (II.) §. 3 die in den Fasern eintretenden Spannungen proportional den Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern und also auch proportional den Abständen der Letzteren von der neutralen Achse. Es seien nun die Spannungen, welche pro Flächeneinheit in den um 1, 2, 3 . . . von der neutralen Achse entfernten Schichten der Zugseite eintreten, gleich $z_1, z_2, z_3 \dots$, und in derselben Weise die Spannungen auf der Druckseite gleich $d_1, d_2, d_3 \dots$. In Fig. 21 sind diese Spannungen ihrer Grösse und Richtung nach graphisch dargestellt. Auf eine zur neutralen Achse xy normal stehende Linie HI sind die mit xy parallelen Faserschichten des Querschnittes projicirt und in den den Projectionen entsprechenden Punkten die in den betreffenden Schichten herrschenden Span-

nungen durch die zu HI normalen Linien $z_1, z_2, z_3 \dots d_1, d_2, d_3 \dots$ repräsentirt, wobei natürlich die Spannungen der Zugseite denen der Druckseite der Richtung nach entgegengesetzt zu nehmen sind.

Da nun die Spannungen in zwei von der neutralen Achse verschieden entfernten Faserschichten sich zu einander verhalten wie die Abstände der Schichten von der neutralen Achse, und da ferner die Spannungen in zwei auf verschiedenen Seiten des Querschnittes gleich weit von der neutralen Achse entfernt liegenden Schichten einander gleich sind,

so müssen die Endpunkte der die Spannungen $z_1, z_2, z_3, \dots d_1, d_2, d_3$ darstellenden Linien, wenn keine der Spannungen z und d die entsprechende Elasticitätsgrenze überschreitet, in eine ihrer ganzen Länge nach gerade Linie CD fallen, welche die HI in A , der Projection der neutralen Achse, schneidet.

Fällt die Projection der von xy entferntesten, und zwar um a_z von derselben abstehenden, Faserschicht der Zugseite nach B , so drückt BC die stärkste Spannung auf der Zugseite aus, und wollen wir dieselbe mit $\mathfrak{S}_z$ bezeichnen; ähnlich sei der Abstand der entferntesten Schicht der Druckseite von xy gleich a_d und die in derselben herrschende Spannung $ED = \mathfrak{S}_d$. Ueberschreitet nun, wie die an der Spitze dieses Paragraphen aufgestellte Bedingung verlangt, weder die Spannung $\mathfrak{S}_z$ den Coëfficienten F_z der stabilen Zugfestigkeit, noch die Spannung $\mathfrak{S}_d$ den Coëfficienten F_d der stabilen Druckfestigkeit, so erhält man stets die zwei ähnlichen Dreiecke ABC und AED . Aus dem Verhältniss der Seiten derselben folgt die Proportion

$$\overline{CB} : \overline{ED} = \overline{AB} : \overline{AE}$$

oder, wenn man statt der Dreieckseiten die durch dieselben repräsentirten Werthe setzt:

$$\mathfrak{S}_z : \mathfrak{S}_d = a_z : a_d \dots \dots \dots (44)$$

Aus dieser Proportion folgt:

$$\mathfrak{S}_z = \frac{a_z}{a_d} \mathfrak{S}_d \dots \dots \dots (45)$$

und:

wenn $\frac{a_z}{a_d} > \alpha$ wäre, so zeigte dies, dass $\mathfrak{S}_d$ in dem vorliegenden Falle sein absolutes Maximum nicht erreichen dürfe, woraus aber zugleich folgte, dass dann $\mathfrak{S}_z$ seinen absolut grössten Werth annehmen könne, ohne dass die letzte der aufgestellten Bedingungen verletzt werde. Setzt man daher nun in (46) $\mathfrak{S}_z = F_z$, so erhält man:

$$\mathfrak{S}_d = \frac{a_d}{a_z} F_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

oder

$$\mathfrak{S}_d = \frac{a_d}{a_z} \alpha F_d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

als den grössten zulässigen Werth von $\mathfrak{S}_d$. Wenn $\frac{A_z}{A_d} = \alpha$ ist, so nehmen nach (48) und (50) $\mathfrak{S}_z$ und $\mathfrak{S}_d$ gleichzeitig ihre absoluten Maximalwerthe an.

Die unternommene Untersuchung liefert immer als Resultat die grössten Werthe, welche in dem betreffenden Falle $\mathfrak{S}_z$ und $\mathfrak{S}_d$ gleichzeitig annehmen dürfen, wenn keiner derselben sein absolutes Maximum überschreiten soll. In den früheren Paragraphen wurde die grösste der beiden Spannungen $\mathfrak{S}_z$ und $\mathfrak{S}_d$ durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet; der grösste zulässige Werth von $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{S}_{max}$ wird daher immer gleich sein dem grössten der beiden, für den betreffenden Fall gefundenen Maximalwerthe für $\mathfrak{S}_z$ und $\mathfrak{S}_d$.

Das Verhältniss $\frac{F_z}{F_d} = \alpha$ kann ≤ 1 , und ebenso $\frac{a_z}{a_d} \leq \alpha$ sein; durch Combination dieser einzelnen Voraussetzungen lassen sich sämtliche hier möglichen Fälle bilden. Führt man für jeden derselben eine der obigen analoge Untersuchung aus, so kann man für die einzelnen Fälle den zulässigen Werth von $\mathfrak{S}_{max}$ in Bezug zu F_z oder F_d ermitteln. In dem folgenden Paragraphen sind die sämtlichen Fälle nebst den entsprechenden Werthen von $\mathfrak{S}_{max}$ in einer für die praktische Anwendung bequemen Form tabellarisch geordnet.

20.

Tabelle über den grössten Werth von $\mathfrak{S}$, welcher zur Berechnung der Elasticitätsmomente in die Formeln der §§. 16, 17, 18 eingeführt werden darf.

In dieser Tabelle bezeichnet: F_z den Coëfficienten der stabilen Zugfestigkeit; F_d den Coëfficienten der stabilen Druckfestigkeit; a_z die Entfernung der stärkst gespannten Faser der Zugseite von der neutralen Achse; a_d die Entfernung der stärkst gespannten Faser der Druckseite von der neutralen Achse.

Wenn:	und wenn:	so ist $\mathfrak{S}_{max}$.
$F_z = F_d$	$a_z \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} a_d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	F_z
$F_z < F_d$	$\frac{a_z}{a_d} \geq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$ $\frac{a_z}{a_d} < 1 \text{ und } > \frac{F_z}{F_d} \quad . \quad . \quad .$ $\frac{a_z}{a_d} = \frac{F_z}{F_d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	F_z $\frac{a_d}{a_z} F_z$ F_d
$F_z > F_d$	$\frac{a_z}{a_d} \leq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$ $\frac{a_z}{a_d} > 1 \text{ und } < \frac{F_z}{F_d} \quad . \quad . \quad .$ $\frac{a_z}{a_d} = \frac{F_z}{F_d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	F_d $\frac{a_z}{a_d} F_d$ F_z

Bei der Berechnung der Dimensionen von auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Körpern ist die stabile Sicherheit immer auf den für den betreffenden Fall geltenden Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ zu beziehen.

21.

Um mit Hülfe der Tabelle des vorigen Paragraphen den Werth von S_{max} . bestimmen zu können, muss man ausser dem für jedes Material constanten Verhältniss $\frac{F_z}{F_d}$ das Verhältniss $\frac{a_z}{a_d}$ kennen. Zur Bestimmung des letzteren Verhältnisses bei einem anzuwendenden Querschnitt hat man zuerst die Lage der neutralen Achse in demselben zu ermitteln. Da diese durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen und auf der Durchschnittlinie normal stehen muss, in welcher die durch die Richtung der biegenden Kraft und den Schwerpunkt des Querschnittes gelegte Ebene den Letzteren schneidet, so wird die Lage der neutralen Achse bekannt sein, wenn man die Lage des Schwerpunktes des Querschnittes kennt und die Richtung der biegenden Kraft, welche letztere aber immer gegeben ist. Die Aufgabe reducirt sich daher auf die Bestimmung des Schwerpunktes des Querschnittes.

Für alle solche Querschnittformen, welche, wie die in der Tabelle §. 14 Nro. I. bis XIV. zusammengestellten, zu zwei auf einander senkrechten Achsen symmetrisch sind, liegt der Schwerpunkt immer in dem Durchschnittspunkt dieser Achsen, und das Verhältniss $\frac{a_z}{a_d}$ ist stets $= 1$.

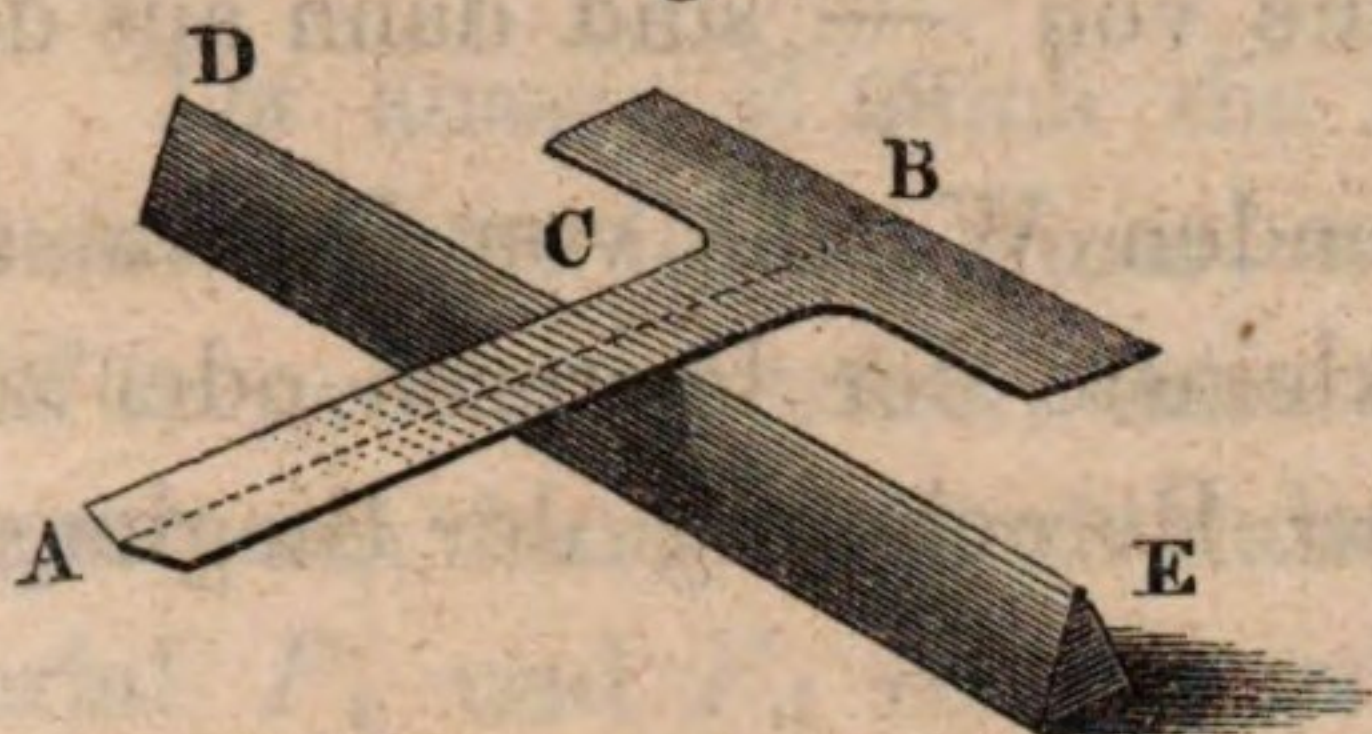
Für alle nicht in die oben erwähnte Kategorie fallenden Querschnitte lässt sich die Lage des Schwerpunktes meist nicht *a priori* angeben. Man muss für diese Fälle die Lage des Schwerpunktes entweder berechnen (wozu für die Querschnitte XV. bis XVII. §. 15 die dort angegebenen Formeln für a dienen können) oder man kann sich, da ein solches Rechnungsverfahren in den meisten Fällen sehr mühsam und zeitraubend ist, statt desselben des folgenden bekannten praktischen Verfahrens bedienen.

Sind alle Dimensionen eines Querschnittes durch Verhältnisse zu einer derselben gegeben, so schneide man den mit diesen Verhältnissen in irgend einem Maassstabe verzeichneten Querschnitt aus steifem Papier oder dünnem Blech aus, und

bringe diese Schablone auf einer Schneide ins Gleichgewicht. Ist dieses eingetreten, so ist die Berührungslinie der Schneide mit der Schablone eine Schwerlinie der Letzteren.

Hat der Querschnitt (Fig. 22) eine Symmetrieachse AB ,

Fig. 22.



so ist der Durchschnittspunkt C derselben mit der gefundenen Schwerlinie DE der Schwerpunkt des untersuchten Querschnittes. Wenn der Querschnitt keine Symmetrieachse hat, so liegt sein Schwerpunkt

Fig. 23.



C (Fig. 23) in dem Durchschnittspunkt zweier auf die erwähnte Weise bestimmter Schwerlinien.

Mit Rücksicht auf die Richtung der biegenden Kraft hat man durch den gefundenen Schwerpunkt die neutrale Achse des Querschnittes zu ziehen, und zu untersuchen, welche Seite des Querschnittes in dem betreffenden Falle als Zugseite und welche als Druckseite zu betrachten ist. Man kann alsdann an dem untersuchten Querschnitt a_z und a_d messen, womit dann auch das Verhältniss $\frac{a_z}{a_d}$ gefunden ist. Dieses Verhältniss wird aber dasselbe bleiben für alle Querschnitte, welche mit dem untersuchten geometrisch ähnlich sind.

Hat man bei einem Querschnitte für alle Dimensionen ausser einer absolute Maasse angenommen, so kann man für jeden Werth, den man für die unbekannt gelassene Dimension versuchsweise annimmt, wenn man den Querschnitt in einem beliebigen Maassstab verzeichnet hat, durch Abwägen der Querschnittschablone deren Schwerpunkt und hierdurch auch $\frac{a_z}{a_d}$ bestimmen.

Als der für die Berechnung des Querschnittmoduls Z zu benutzende Werth von a (siehe §. 15) ist immer der grösste von den beiden gefundenen Werthen a_z und a_d zu nehmen.

Kann die biegende Kraft verschiedene Richtungen annehmen, so muss für jede derselben die neutrale Achse des Querschnittes und der entsprechende Werth von $\frac{a_z}{a_d}$ aufgesucht

werden. Für die einzelnen Werthe von $\frac{a_z}{a_d}$ sind dann aus der Tabelle in §. 20 die correspondirenden Werthe von $\mathfrak{S}_{max}$. zu bestimmen und schliesslich der kleinste der letzteren oder ein Theil desselben in die Formeln zur Berechnung der Biegungsfestigkeit einzuführen.

Obgleich das angegebene praktische Verfahren zur Aufindung des Schwerpunktes der Querschnitte hinsichtlich der Allgemeinheit dem der Rechnung nachsteht, so ist es dem Letzteren doch in vielen Fällen vorzuziehen, indem es leicht auch auf die complicirtesten Querschnittformen (ohne dass man dabei Vernachlässigungen zu begehen brauchte) anzuwenden ist, und nicht so leicht Veranlassung zu Fehlern giebt, wie die Rechnung mit ausgedehnten und verwickelten Formeln.

22.

Beste Querschnitte.

Der Querschnitt eines auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Stabes wird hinsichtlich des Materialaufwandes um so vorteilhafter sein, je grösser bei gleichem Flächeninhalt, unter gleichmässiger Berücksichtigung sämtlicher Richtungen, in welchen die biegende Kraft successive wirkt, das Elasticitätsmoment des Querschnittes ist. Nach §. 13 ist letzteres:

$$M = \mathfrak{S} Z;$$

bei gleichbleibendem Werthe von $\mathfrak{S}$ wächst daher M in directem Verhältniss mit Z . Da die Momente der Spannungen der Fasern wie die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Achse zunehmen, so wird bei zwei an Flächeninhalt gleichgrossen Querschnitten Z für denjenigen den grössten Werth erhalten, dessen Fasern sich verhältnissmässig weiter von der neutralen Achse befinden. Hieraus folgt als erste Bedingung für die beste Verwendung des Materials in einem Querschnitt:

dass man das Material möglichst entfernt von der neutralen Achse anbringen soll.

Wie weit man hierin gehen kann, wird in jedem einzelnen Fall durch praktische und constructive Rücksichten bedingt.

Da ausser Z auch die Spannung $\mathfrak{S}$ Factor des Elasticitätsmomentes ist, so muss, wenn dieses gross werden soll, auch dafür gesorgt werden, dass $\mathfrak{S}$ einen möglichst grossen Werth annehmen kann. Sind daher bei dem zu verwendenden Material F_z und F_d von einander verschieden, so muss, als auf eine zweite Bedingung für die gute Verwendung des Materials, darauf gesehen werden:

dass, wo es angeht, als Querschnittform eine solche gewählt werde, bei welcher nach der Tabelle in §. 20 als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ der grösste der beiden Coefficienten F_z und F_d genommen werden darf.

Wenn den beiden vorigen Bedingungen genügt worden ist, so ist damit doch die beste Verwendung des Materials noch nicht immer erreicht, sondern es kann, ausser durch möglichste Entfernung des Materials von der neutralen Achse, durch eine richtige Vertheilung desselben auf die Zug- und Druckseite des Querschnittes das Elasticitätsmoment des Letzteren noch erhöht werden.

Denkt man sich alles Material eines Querschnittes in zwei dünnen Schichten parallel zur neutralen Achse um $a_z + a_d = h$ von einander entfernt angebracht, so erhält man eine Materialverwendung, welche für einen bestimmten Werth von h die erste Bedingung vollständig erfüllt. Für diesen Fall kann man nun nachweisen:

dass bei demselben Materialaufwand das Elasticitätsmoment jenes ideellen Querschnittes ein Maximum wird, wenn für denselben

$$\frac{a_z}{a_d} = \frac{F_z}{F_d}.$$

Daraus folgt endlich als dritte Bedingung für eine möglichst gute Verwendung des Materials der folgende wichtige Satz:

dass man einem Querschnitt, unter möglichster Berücksichtigung der ersten Bedingung, wo es thunlich ist, eine solche Form geben soll, dass bei derselben

$$\frac{a_z}{a_d} = \frac{F_z}{F_d},$$

so dass die stärkst verlängerte Faser des Querschnittes und die stärkst verkürzte Faser desselben gleichzeitig an den Elasticitätsgrenzen der Verlängerung und Verkürzung ankommen.

Wir wollen einen Querschnitt, welcher der dritten Bedingung genügt, einen solchen von gleicher stabiler Festigkeit nennen. Für Materialien, für welche das Verhältniss $\frac{F_z}{F_d}$ verschieden ist, können auch die Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit nicht übereinstimmen.

Den beiden letzten Bedingungen kann nur dann für jedes beliebige Material immer entsprochen werden, wenn die Richtung der biegenden Kraft fortwährend dieselbe bleibt. Wirkt die Kraft aber abwechselnd in zwei einander gerade entgegengesetzten Richtungen, oder ändert sich die Krafrichtung so, dass sich die neutrale Achse des Querschnittes ganz oder zum Theil um den Schwerpunkt desselben dreht, so kann man nur für solche Materialien einen Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit verwirklichen, bei welchen $F_z = F_d$ ist. Denn da in den genannten Fällen die Zugseite und die Druckseite ihre Lage abwechselnd vertauschen, so nimmt auch $\frac{a_z}{a_d}$ abwechselnd seinen reciproken Werth an; nun können aber $\frac{a_z}{a_d}$ und $\frac{a_d}{a_z}$ nicht beide gleich sein dem für jedes Material constanten Verhältniss $\frac{F_z}{F_d}$, wenn dieser Quotient nicht $= 1$ ist.

Für solche Materialien, für welche F_z und F_d verschieden sind, erhält man in dem einen Falle, wo die biegende Kraft abwechselnd in entgegengesetzten Richtungen wirkt,

einen hinsichtlich des Materialaufwandes besten Querschnitt, wenn man, unter möglichster Erfüllung der ersten Bedingung, den Querschnitt zur neutralen Achse symmetrisch macht. In dem anderen Falle, wo in Folge der Aenderung der Kraft-richtung die neutrale Achse sich um den Schwerpunkt des Querschnittes dreht, ist der hinsichtlich des Materialaufwandes beste Querschnitt der Kreisring.

23.

Nach dem in den letzten Paragraphen Gesagten könnte es vielleicht schwierig und umständlich erscheinen, bei Berechnung der Biegungsfestigkeit von Constructionstheilen, für deren Material F_z und F_d verschieden sind, den Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ zu bestimmen. Fasst man jedoch das Folgende ins Auge, so wird man finden, dass sich die scheinbaren Schwierigkeiten auf ein Geringes zurückführen lassen.

Die bei Weitem am zahlreichsten vorkommenden Arten der Einwirkung der biegenden Kraft sind der Richtung nach, worin dieselbe in ihrer Ebene auf den Körper wirkt, die folgenden:

- 1) Die Kraft wirkt constant in einer und derselben Richtung. (Dies ist fast der einzige vorkommende Fall bei den statischen Bauwerken.)
- 2) Die Kraft wirkt abwechselnd in gerade entgegengesetzten Richtungen (Balancier, Hebel).
- 3) Die Krafrichtung ändert sich successive so, dass die neutrale Achse sich um den Schwerpunkt des Querschnittes dreht (Zapfen, Achsen).

Es ist nun sehr leicht zu ermitteln, welcher der drei Fälle bei einem auf Biegungsfestigkeit zu berechnenden Constructionstheile stattfindet; ist dieses entschieden, so kann man meist ohne Weiteres den zu wählenden Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ bestimmen.

In den beiden letzten Fällen hat man nämlich immer den kleinsten der beiden Werthe F_z und F_d als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ in die betreffenden Formeln einzuführen.

Im ersten Fall dagegen soll man immer suchen, Quer-

schnitte von gleicher stabiler Festigkeit anzuwenden, und kann man dann ohne weitere Untersuchung den grössten der beiden Werthe F_z und F_d als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ in Rechnung ziehen.

Nur wenn man bei dem ersten Fall besonders veranlasst ist, keinen Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit anzuwenden, hat man mit Hülfe der Tabelle in §. 20 den einzusetzenden grössten Werth von $\mathfrak{S}$ zu bestimmen.

Da es für ein bestimmtes Verhältniss $\frac{F_z}{F_d}$ bloss von der Form und den Dimensionsverhältnissen des Querschnittes abhängt, ob derselbe von gleicher stabiler Festigkeit ist oder nicht, so kann man sich die Bestimmung des Maximalwerthes von $\mathfrak{S}$ noch mehr erleichtern, wenn man für die gebräuchlichsten Materialien Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit aufsucht, welche man dann in verschiedenen absoluten Werthen zur Anwendung bringen kann.

Die Anwendung der in den vier letzten Paragraphen aufgestellten Regeln auf die beiden, für die meisten Constructionen des Ingenieurs wichtigsten Materialien, das Schmiedeeisen und das Gusseisen, werden das Verständniss der ausgesprochenen Principien vollkommen sichern.

24.

Schmiedeeisen.

Bei dem Schmiedeeisen ist, wie aus den Tabellen in §. 36 zu ersehen ist, $F_z = F_d$ und also $\frac{F_z}{F_d} = 1$. Dieses Verhältniss ist in Bezug auf die Biegezugfestigkeit als das günstigste zu bezeichnen, welches bei einem Material überhaupt stattfinden kann. Wegen der Gleichheit der beiden Coëfficienten bedarf es natürlich zur Bestimmung der als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ einzusetzenden Spannung keiner besonderen Wahl, und ist der in jedem Fall für $\mathfrak{S}_{max}$ einzuführende Werth zugleich der grösstmögliche. Querschnitte von gleicher stabiler Festigkeit sind für Schmiedeeisen vorab alle zweiachsig symmetrischen Querschnitte, so dass diese bei den Schmiedeeisenconstructionen

im Allgemeinen allen anderen vorzuziehen sind. Auch sind die genannten Querschnitte hinsichtlich der Vertheilung des Materials auf Zug- und Druckseite die günstigsten. Sieht man sich aber veranlasst, einen zur neutralen Achse unsymmetrischen Querschnitt anzuwenden, so soll man wenigstens der Bedingung für den Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit, dass nämlich $\frac{a_z}{a_d} = 1$ sein soll, so viel als thunlich zu genügen suchen.

Bei Eisenbahnschienen, welche, wie die Vignol- und Brückschienen, zur neutralen Achse unsymmetrisch sind, soll man daher doch darauf sehen, dass der Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit werde, indem dies ein Hauptelement für die günstige Verwendung des Materials ist.

Bei den Röhrenbrücken sieht man sich genöthigt, für den Querschnitt der Decke eine andere constructive Form zu wählen, als für den Querschnitt des Bodens, indem man die Erstere aus einer grösseren Anzahl Zellen bildet, als den Letzteren. Auch hier wird es für die vortheilhafteste Verwendung des Materials von der grössten Wichtigkeit sein, dass man die Materialvertheilung in dem ganzen Röhrenquerschnitt so anordne, dass bei demselben $a_z = a_d$ werde, wobei jedoch der Einfluss der Verniethung noch besonders in Betracht zu ziehen ist.

Bei der Bestimmung von Querschnittformen für Schmiedeseisen, welche zur neutralen Achse unsymmetrisch sind, bei denen man aber ein bestimmtes Verhältniss $\frac{a_z}{a_d}$ festgehalten wissen will, kann man sich mit Vorthail eines Verfahrens bedienen, welches bei der Bestimmung der Querschnittformen für Gusseisen im nächsten Paragraphen besprochen werden wird.

25.

Gusseisen.

Bei dem Gusseisen ist nach den Tabellen in §. 36 $F_z = \frac{1}{2} F_d$, oder $\frac{F_z}{F_d} = \frac{1}{2}$. In all den Fällen, wo man wegen

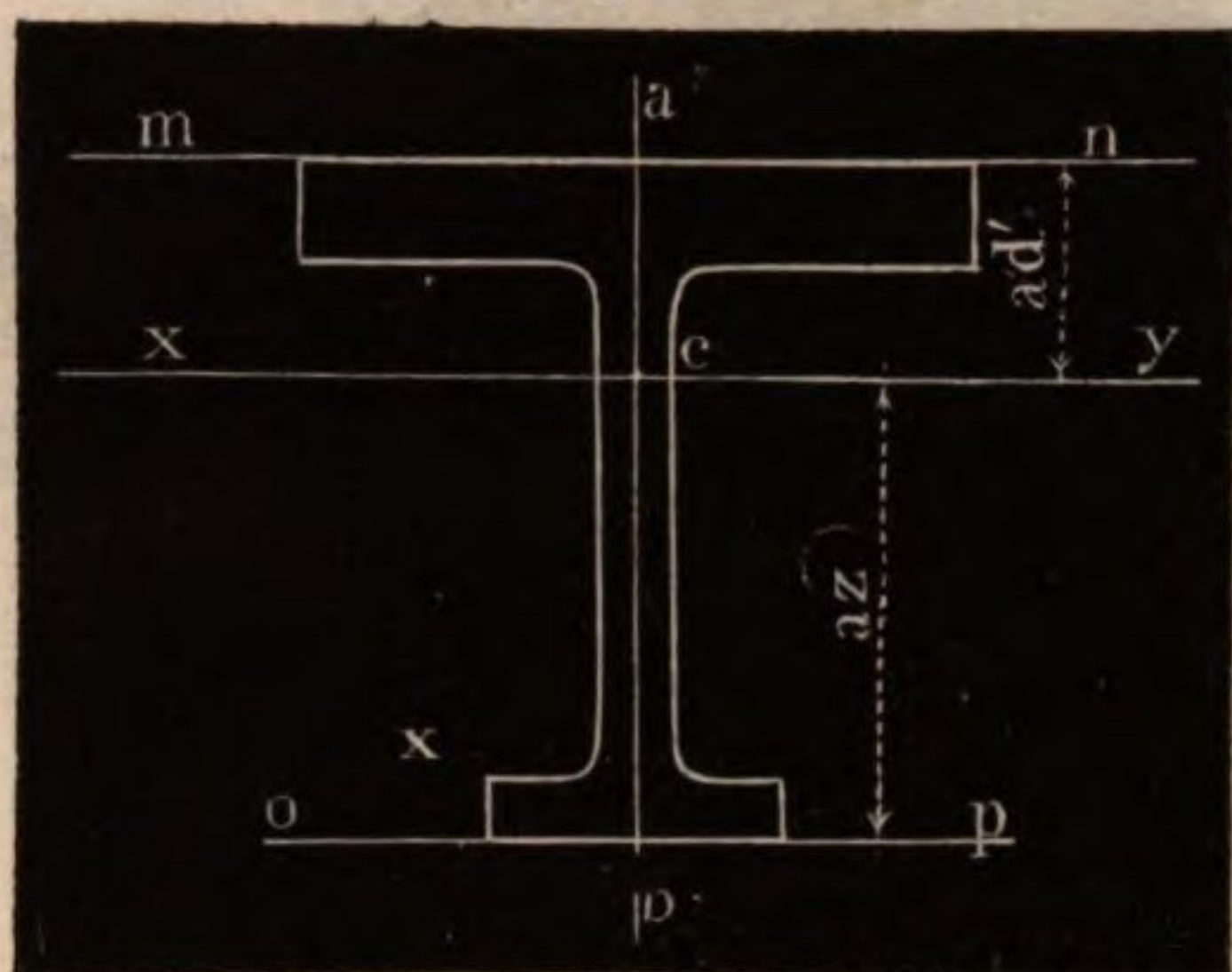
Aenderung der Krafrichtung Querschnittformen anwenden muss, welche zur neutralen Achse oder zu zwei Achsen symmetrisch sind, darf man nur den kleineren der beiden Coëfficienten, welcher hier nur die Hälfte des grösseren beträgt, als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ einführen. Dadurch wird, wenn in solchen Fällen Gusseisen verwandt wird, ein verhältnissmässig grosser Materialaufwand bedingt. Würde man sich in den erwähnten Fällen des Schmiedeisens bedienen, so wäre die einzuführende Maximalspannung das Doppelte der bei Gusseisen zulässigen, und derselbe zur neutralen Achse symmetrische Querschnitt erhält bei gleicher Sicherheit, wenn er in Schmiedeisen ausgeführt wird, ein doppelt so grosses Elasticitätsmoment, als wenn er in Gusseisen ausgeführt wird. Zugleich ist ein solcher Querschnitt für Schmiedeisen einer von gleicher stabiler Festigkeit, während dies in den erwähnten Fällen für Gusseisen nicht zu erreichen ist. Das Vorhergehende findet unmittelbare Anwendung bei der Vergleichung gusseiserner und schmiedeiserner Zapfen und Achsen.

Für einen Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit muss bei Gusseisen $\frac{a_z}{a_d} = \frac{1}{2}$ sein. Da bei einer grossen Zahl der Anwendungen des Gusseisens, wo dessen Biegezugfestigkeit beansprucht wird, die Richtung der biegenden Kraft constant ist (gusseiserne Balken und Träger), so wird es hier sehr vortheilhaft sein, Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit aufzustellen, bei welchen dann als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ der Werth F_d eingeführt werden darf. Zur Bestimmung solcher Querschnittformen kann ein praktisches Verfahren, welches aus dem in §. 21 angegebenen abgeleitet ist, ausserordentlich behülflich sein.

Man trage auf ein Stück steifen Carton oder dünnes Blech (Fig. 24) eine Linie ab von beliebiger Grösse auf und theile dieselbe so in zwei Theile ca und cb , dass diese sich verhalten wie $F_z : F_d$ bei dem Material, für welches ein Querschnitt von gleicher stabiler Festigkeit aufgesucht werden soll; (bei Gusseisen wie 1 : 2). Durch den Theilpunkt c ziehe man normal zu ab die neutrale Achse xy des zu bildenden Quer-

schnittes; soll Letzterer eine Symmetrieachse haben, so lasse man diese mit ab zusammenfallen. Man verzeichne nun mit

Fig. 24.



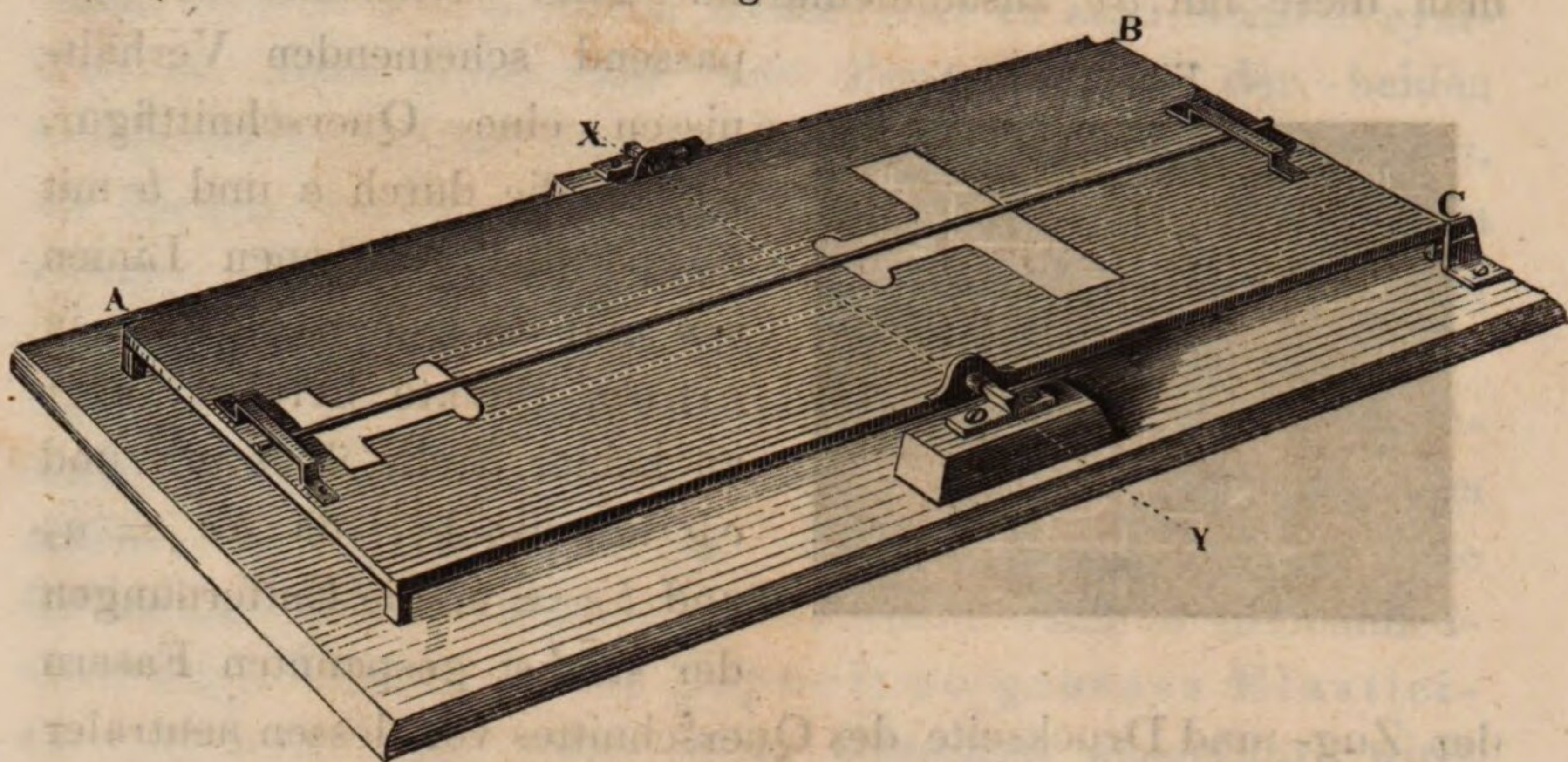
passend scheinenden Verhältnissen eine Querschnittfigur, welche die durch a und b mit xy parallel gezogenen Linien mn und op jede wenigstens in einem Punkte berührt, aber an keiner Stelle über mn und op hinausgeht, da $ac = a_z$ und $bc = a_d$ die Entfernungen der stärkst gespannten Fasern

der Zug- und Druckseite des Querschnittes von dessen neutraler Achse bedeuten sollen. Die so verzeichnete Querschnittfigur wird als Schablone ausgeschnitten und es werden alsdann ihre Dimensionen durch Wegnehmen und Hinzufügen an einzelnen Stellen so lange gegeneinander geändert, bis unter Einhaltung des bestimmten Verhältnisses $\frac{a_z}{a_d}$, die Achse xy eine Schwerlinie und damit zugleich eine neutrale Achse des gebildeten Querschnittes wird. Ob dieses erreicht ist, wird durch versuchsweises Balanciren der Schablone auf der Linie xy untersucht. Wenn xy Schwerlinie geworden, so ist der gefundene Querschnitt für eine zur xy normal wirkende biegende Kraft und für das Material, dessen Verhältniss $\frac{F_z}{F_d}$ bei der Feststellung von $\frac{ca}{cb} = \frac{a_z}{a_d}$ zu Grunde gelegt wurde, ein solcher von gleicher stabiler Festigkeit, und es kommen seine Dimensionen, welche am besten auf eine unter ihnen bezogen werden, zur Berechnung des Querschnittmoduls Z dienen. Für dasselbe Material ist jeder mit dem gefundenen geometrisch ähnliche Querschnitt ebenfalls ein solcher von gleicher stabiler Festigkeit.

Das versuchsweise Balanciren der Querschnittschablonen kann mit Hülfe eines in (Fig. 25, s. f. S.) der Hauptsache nach dargestellten Instrumentes ausgeführt werden.

Es besteht dasselbe in einer ähnlich wie ein Wagbalken

Fig. 25.



auf zwei Schneiden aufgehängten Tafel ABC , welche für sich genau balancirt ist. Auf diese wird die zu untersuchende Querschnittschablone so aufgelegt, dass die Achse xy des Querschnittes mit der Verbindungslinie XY der Schneiden zusammenfällt. Ein in der Längsachse der Tafel angebrachtes Rüthchen dient dazu, die Schablone auf derselben festzuhalten.

Die Schablone wird nun, unter strenger Beibehaltung des vorherbestimmten Verhältnisses $\frac{a_z}{a_d}$ so lange geändert, bis die

Tafel bei einem der horizontalen Lage entsprechenden Strich bei C genau einspielt, in welchem Falle die Linie xy Schwerlinie des Querschnittes ist. Das Instrument gestattet, Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit auch dann leicht zu ermitteln, wenn dieselben durchbrochen sind oder aus beliebig vielen Theilen bestehen; auch ist es gleichgültig, ob der Querschnitt eine symmetrische Figur ist oder nicht.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass man den Apparat behufs grösserer Genauigkeit mit den bei den chemischen Wagen angewandten Mechanismen für die Empfindlichmachung und Adjustirung versehen kann. Mit Hülfe eines dem beschriebenen ähnlichen Apparates sind die im folgenden Paragraphen zusammengestellten Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit bestimmt worden.

26.

Querschnittformen von gleicher stabiler Festigkeit für Gusseisen.

In der folgenden Tabelle sind acht Querschnittformen zusammengestellt, bei denen sich $a_z : a_d$ verhält, wie 1 : 2; die neutrale Achse xy ist in denselben durch eine punktirte Linie angegeben und die Zugseite in den Zeichnungen immer nach oben gelegt. Die Abmessungen der Querschnitte sind sämtlich in Bezug zu einer unter ihnen, zu b , ausgedrückt.

In der mit T überschriebenen Spalte ist für jeden Querschnitt das Trägheitsmoment, bezogen auf die neutrale Achse, durch b und einen Coëfficienten ausgedrückt.

Die mit a überschriebene Spalte enthält die Entfernung der stärkst gespannten Faser von der neutralen Achse.

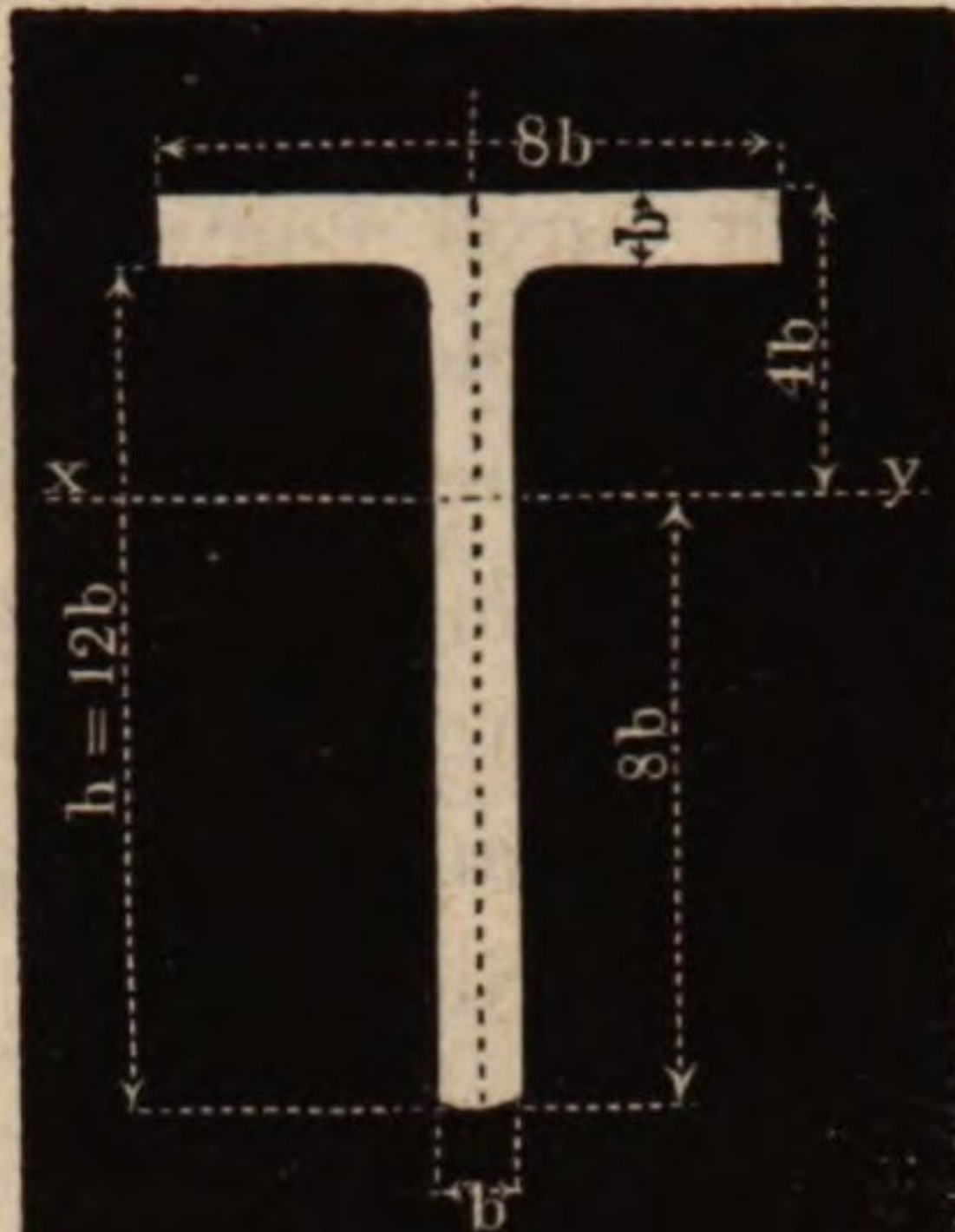
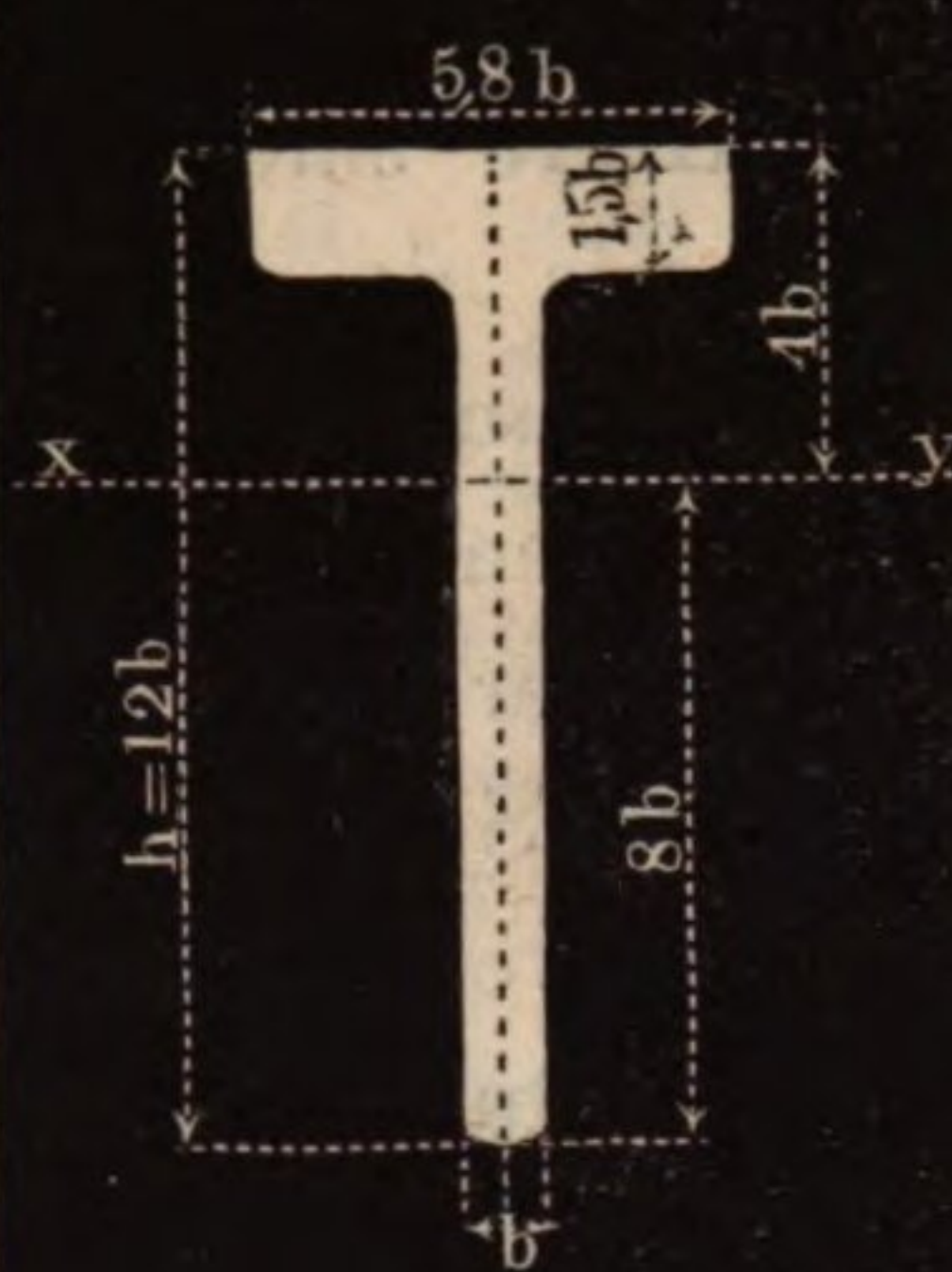
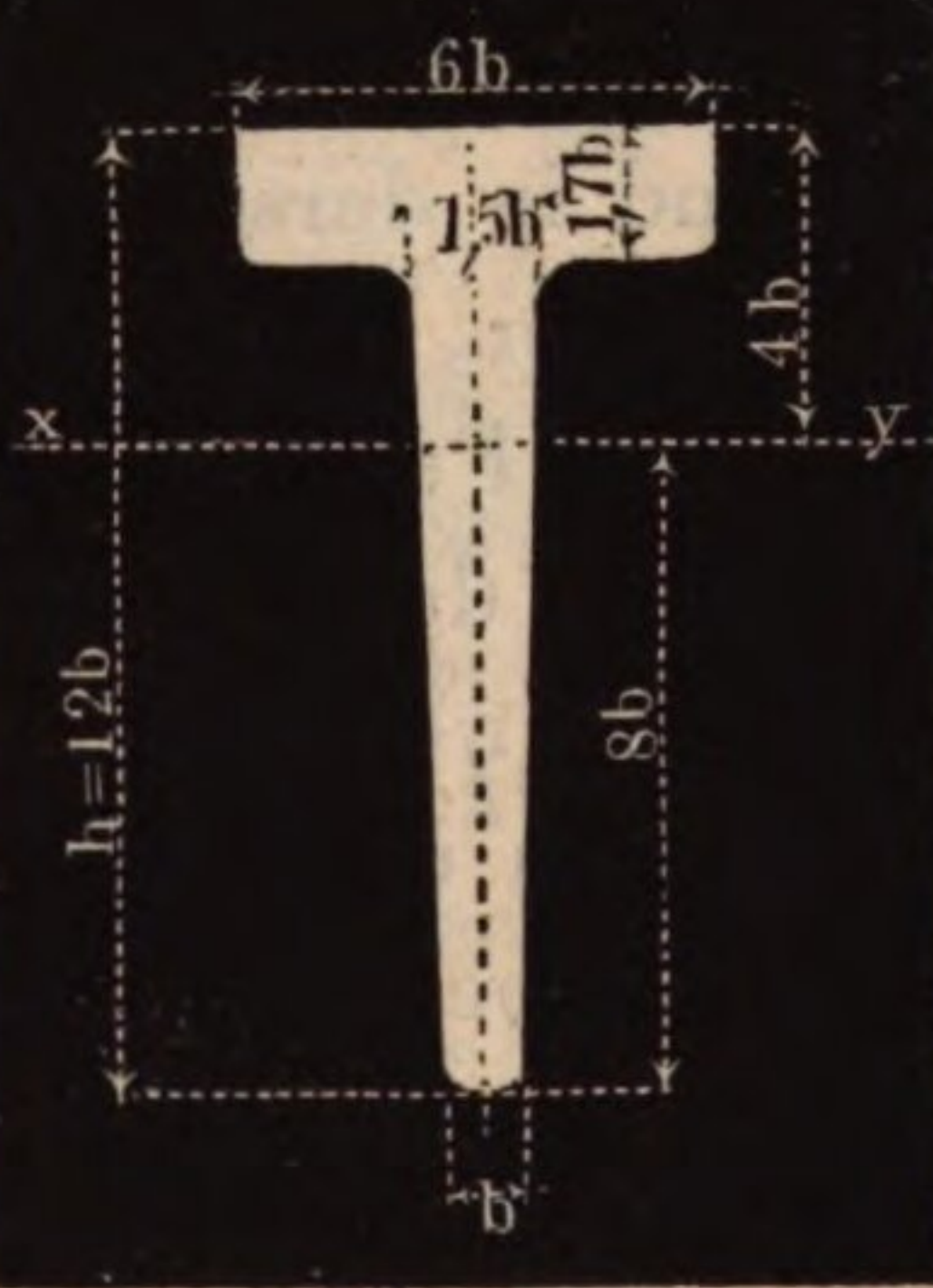
In der mit Z überschriebenen Spalte sind für die Querschnitte die Model angegeben; Letztere sind sowohl durch b , als durch die Höhe h und einen aus den Verhältnissen der Dimensionen berechneten Coëfficienten ausgedrückt.

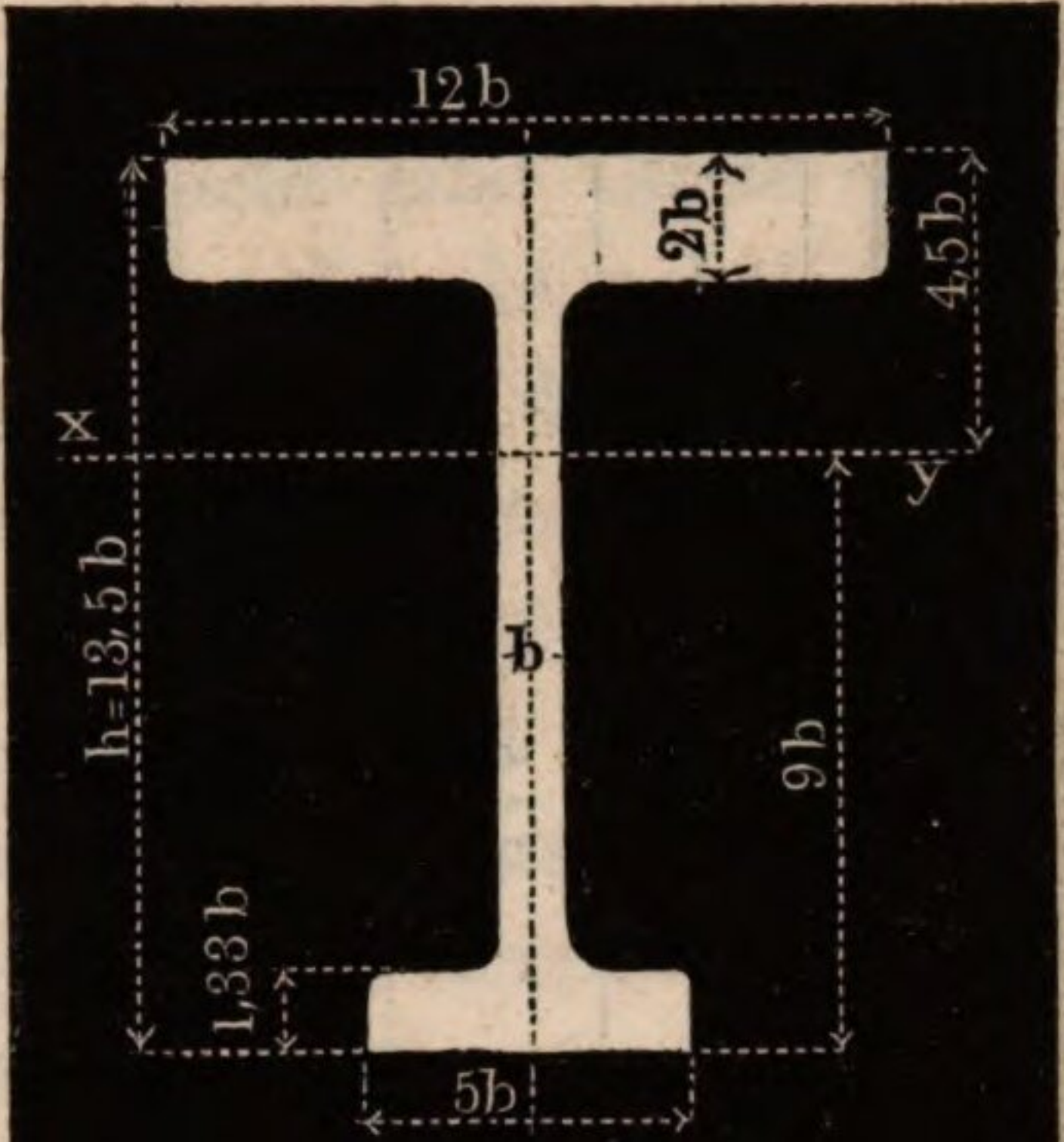
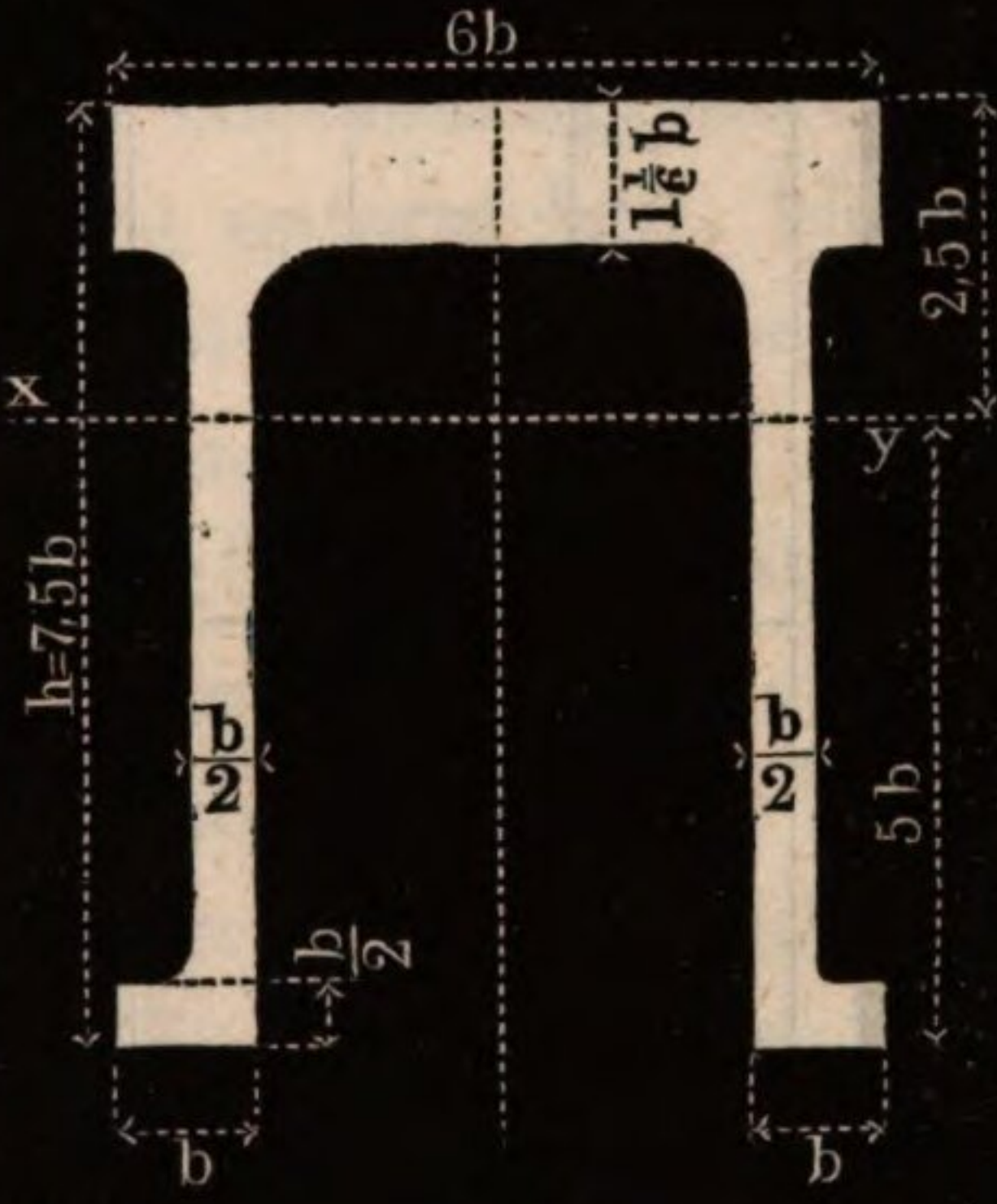
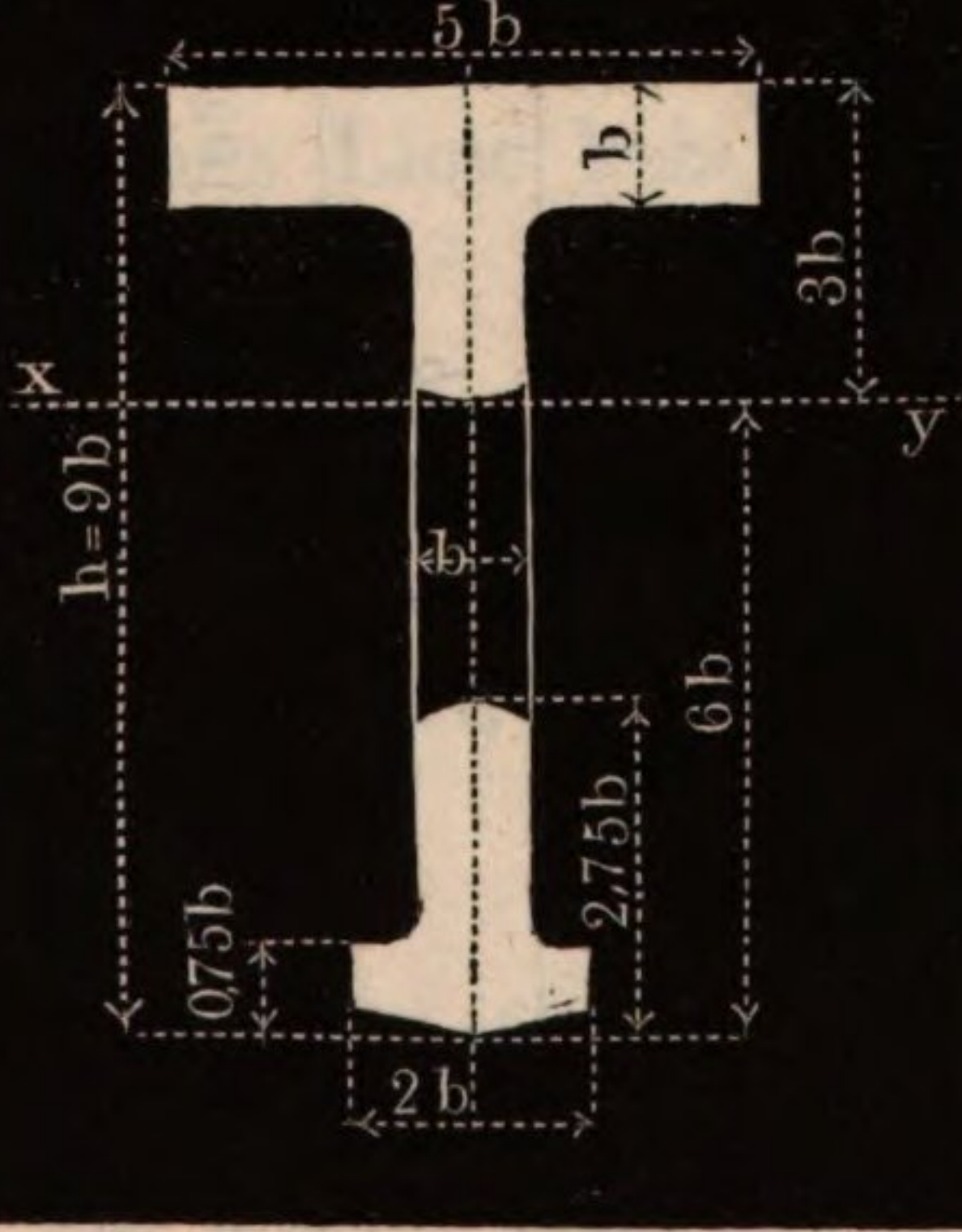
Die mit F überschriebene Spalte enthält die durch b und h ausgedrückten Flächeninhalte der Querschnitte.

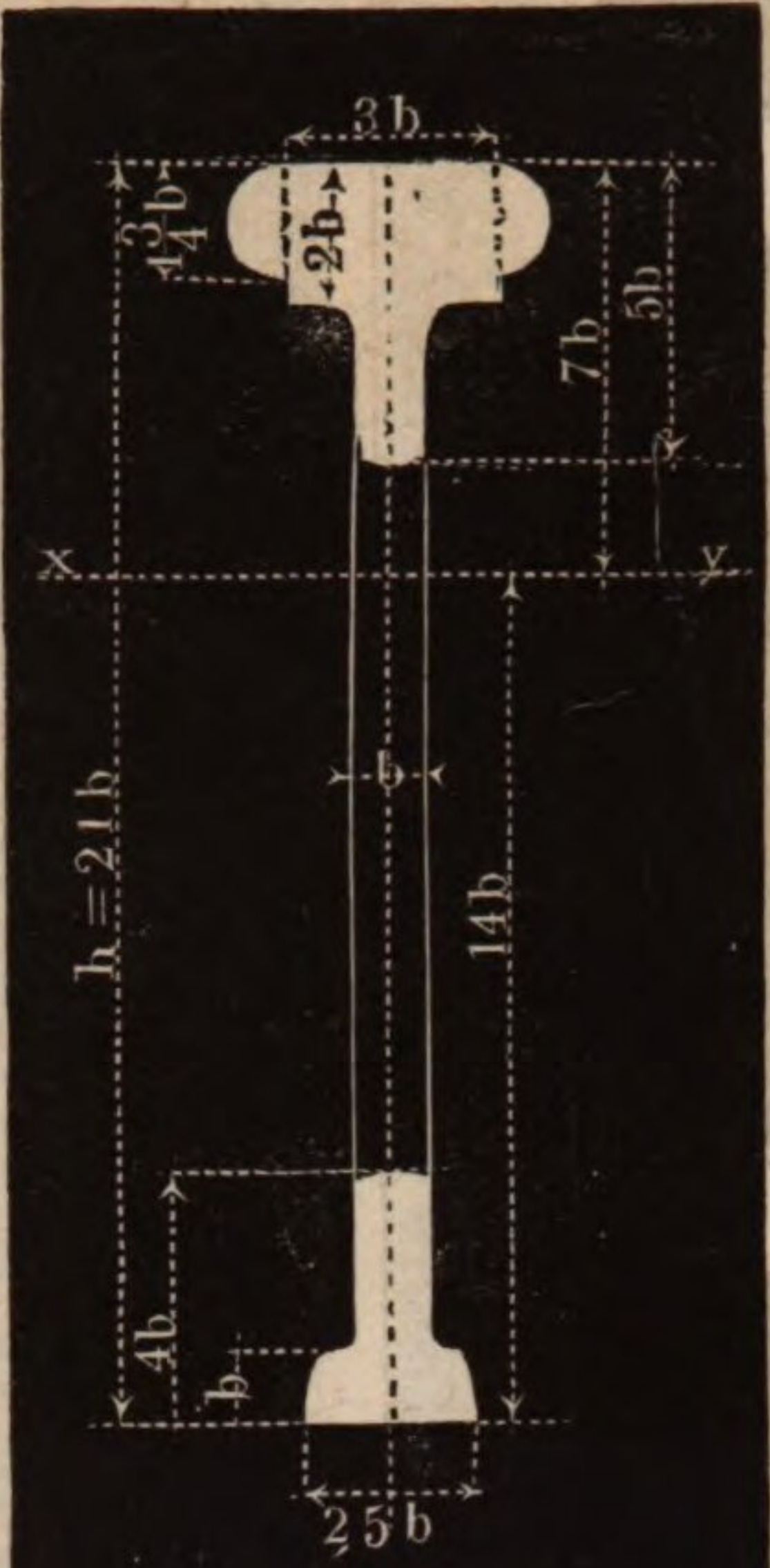
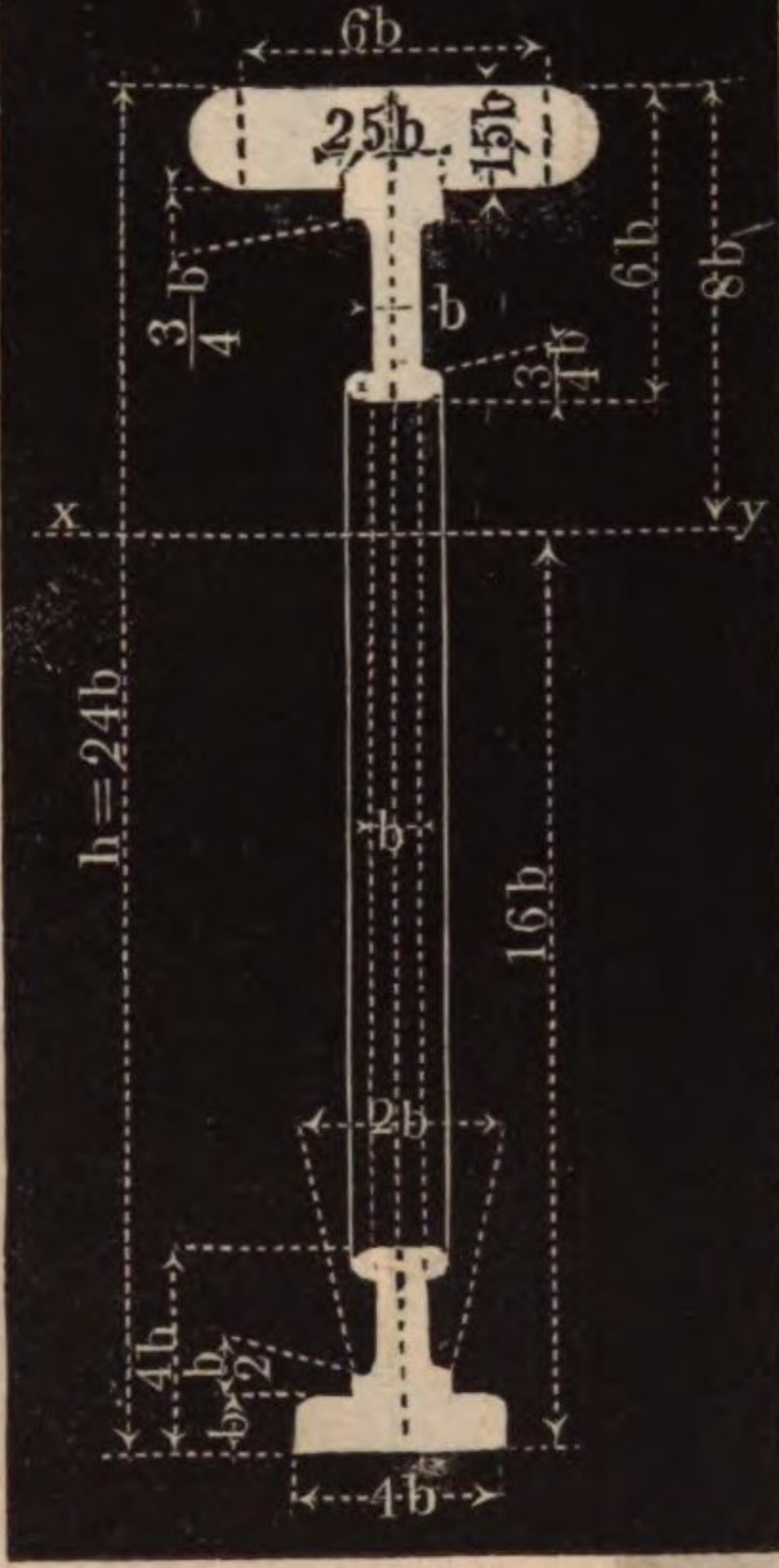
Die in der mit φ überschriebenen Spalte enthaltenen Zahlen drücken die Verhältnisse aus, in welchen die Flächen der resp. Querschnitte zu der Fläche des Querschnittes Nro. I. als Einheit stehen müssen, wenn sämtliche Querschnitte das gleiche Elasticitätsmoment gewähren sollen. Die Werthe von φ repräsentiren daher den verhältnissmässigen Materialaufwand, welchen gleich lange und in derselben Weise beanspruchte Träger erfordern, wenn dieselben, mit den verschiedenen Querschnitten ausgeführt, gleiche stabile Festigkeit besitzen sollen.

Da die den einzelnen Ausdrücken der Tabelle angehörnden Coëfficienten aus den Dimensionsverhältnissen der Querschnitte berechnet sind, so bleiben dieselben constant, so lange jene Verhältnisse ungeändert bleiben; die absolute Grösse der Dimensionen wird durch die Veränderliche b (resp. h) in Betracht gezogen.

Bei Benutzung eines der Querschnitte der folgenden Tabelle ist als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ immer F_d einzuführen.

Nro.	Querschnittform.	T.	a.	Z.	F.	φ .
I.		$278,3b^4$	$8b$	$34,8b^3 = 0,0201h^3$	$19b^2 = 0,132h^2$	1,0
II.		$269,4b^4$	$8b$	$33,675b^3 = 0,015h^3$	$19,2b^2 = 0,133h^2$	1,028
III.		$294,84b^4$	$8b$	$36,85b^3 = 0,0213h^3$	$23,075b^2 = 0,1602h^2$	1,165

Nro	Querschnittform.	T.	a.	Z.	F.	φ.
IV.		$651,135 b^4$	$9b$	$72,348 b^3 = 0,0992 h^3$	$40,82 b^2 = 0,224 h^2$	$0,583$
V.		$80,288 b^4$	$5b$	$16,075 b^3 = 0,03806 h^3$	$13,83 b^2 = 0,246 h^2$	$1,372$
VI.		$118,656 b^4$	$6b$	$19,776 b^3 = 0,0271 h^3$	$10,5 b^2 = 0,13 h^2$	$0,898$

Nro.	Querschnittform.	T.	a.	Z.	F.	φ .
VII.		$1202,08 b^4$	$14 b$	$85,863 b^3 = 0,0093 h^3$	$16,9 b^2 = 0,0383 h^2$	0,483
VIII.		$2318,15 b^4$	$16 b$	$144,884 b^3 = 0,0105 h^3$	$23,891 b^2 = 0,0415 h^2$	0,483

Biegung prismatischer Stäbe.

27.

Wenn ein prismatischer Stab durch Einwirkung einer äusseren Kraft gebogen wird, so bildet jede Faser der neutralen Schicht eine Curve eigener Art, welche den Namen elastische Linie erhalten hat. Unter der Voraussetzung, dass keine Faser des Stabes über die entsprechende Elastizitätsgrenze verlängert oder verkürzt worden, stellt die Mechanik die Gleichung der elastischen Linie auf. Diese Gleichung ändert sich für die verschiedenen Arten der Einwirkung der biegenden Kraft auf den Körper und es sind für einige der häufigst vorkommenden Fälle in den folgenden Paragraphen die Gleichung der elastischen Linie und der Ausdruck für die grösste Ordinate derselben (welche die grösste Einbiegung repräsentirt) zusammengestellt.

Um zu untersuchen, bis zu welcher Grösse der biegenden Kraft P bei einem Stabe von bestimmtem Material und bekannten Dimensionen die in dem betreffenden Fall anzuwendende Gleichung der elastischen Linie noch Gültigkeit hat, muss man aus der demselben Fall entsprechenden Gleichung des §. 16 das Gewicht P bestimmen, welches diese Gleichung liefert, wenn man darin die Dimensionen des Stabes einführt, und für $\mathfrak{S}$ den nach der Tabelle in §. 20 zulässigen Maximalwerth einsetzt. Wenn die Grösse der biegenden Kraft über die so bestimmte Belastung P hinausgeht, kann die Gleichung der elastischen Linie kein richtiges Resultat mehr geben.

28.

Biegung eines Stabes, der an einem Ende festgehalten und am anderen Ende belastet ist.

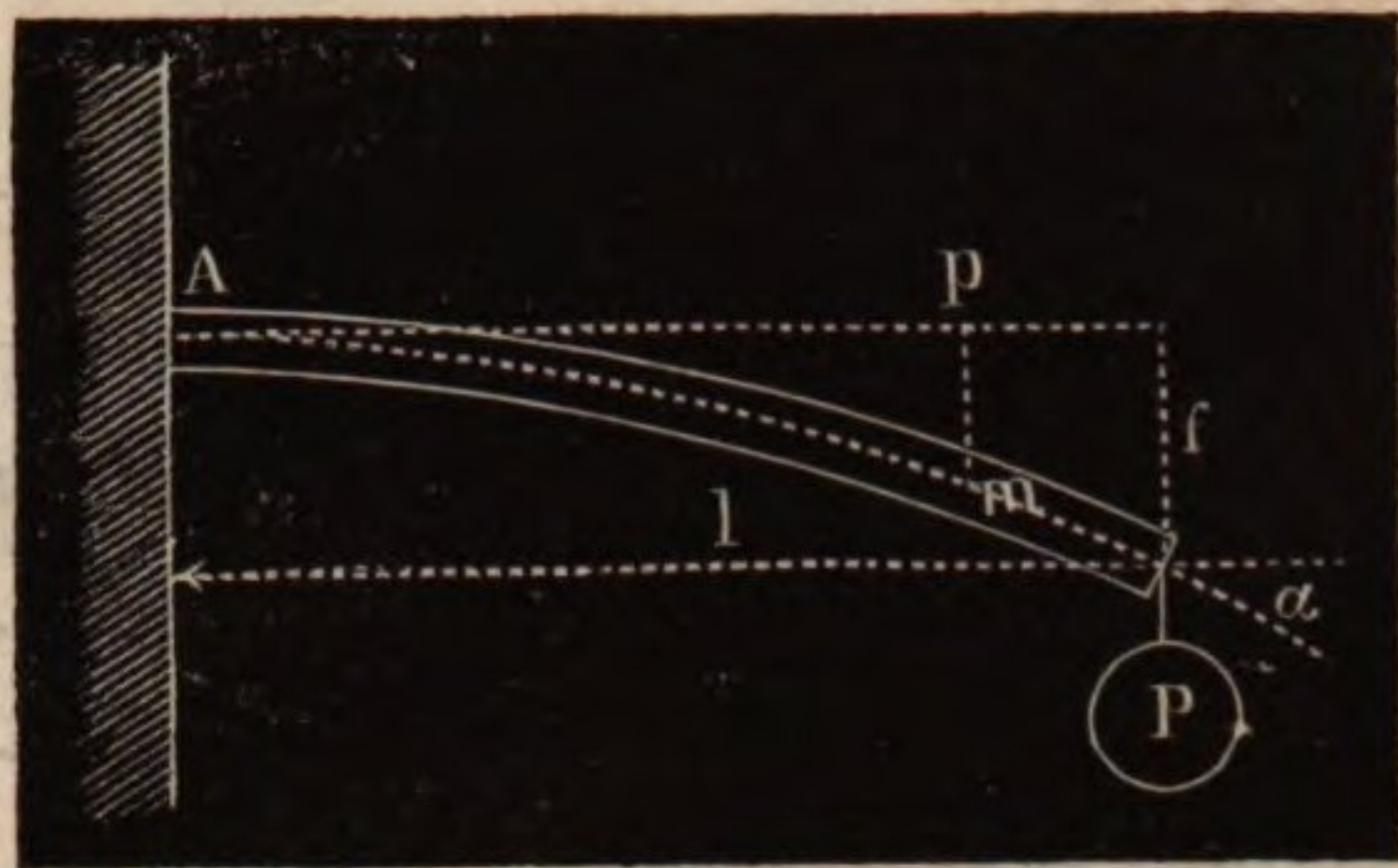
(Fig. 26 a. f. S.)

Es sei:

- P die Belastung am freien Ende des Stabes, senkrecht auf dessen Längsachse wirkend;
- l die ganze Länge des Stabes;

f die Senkung des freien Endes des Stabes;

Fig. 26.



α der Winkel, welchen die am freien Ende des Stabes an dessen neutrale Schicht gezogene Tangente mit deren ursprünglicher Lage bildet;
 ϵ das Biegemoment des Stabes, d. h. das Product aus dem Trägheitsmoment T

des Querschnittes in den Elasticitätsmodul E des Materials, aus welchem der Stab besteht;

$x = Ap$, und $y = pm$ die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Belastung gebogenen neutralen Faser.

Vernachlässigt man das Eigengewicht des Stabes, so ist:

$$y = \frac{P}{2\epsilon} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad \dots \quad (51)$$

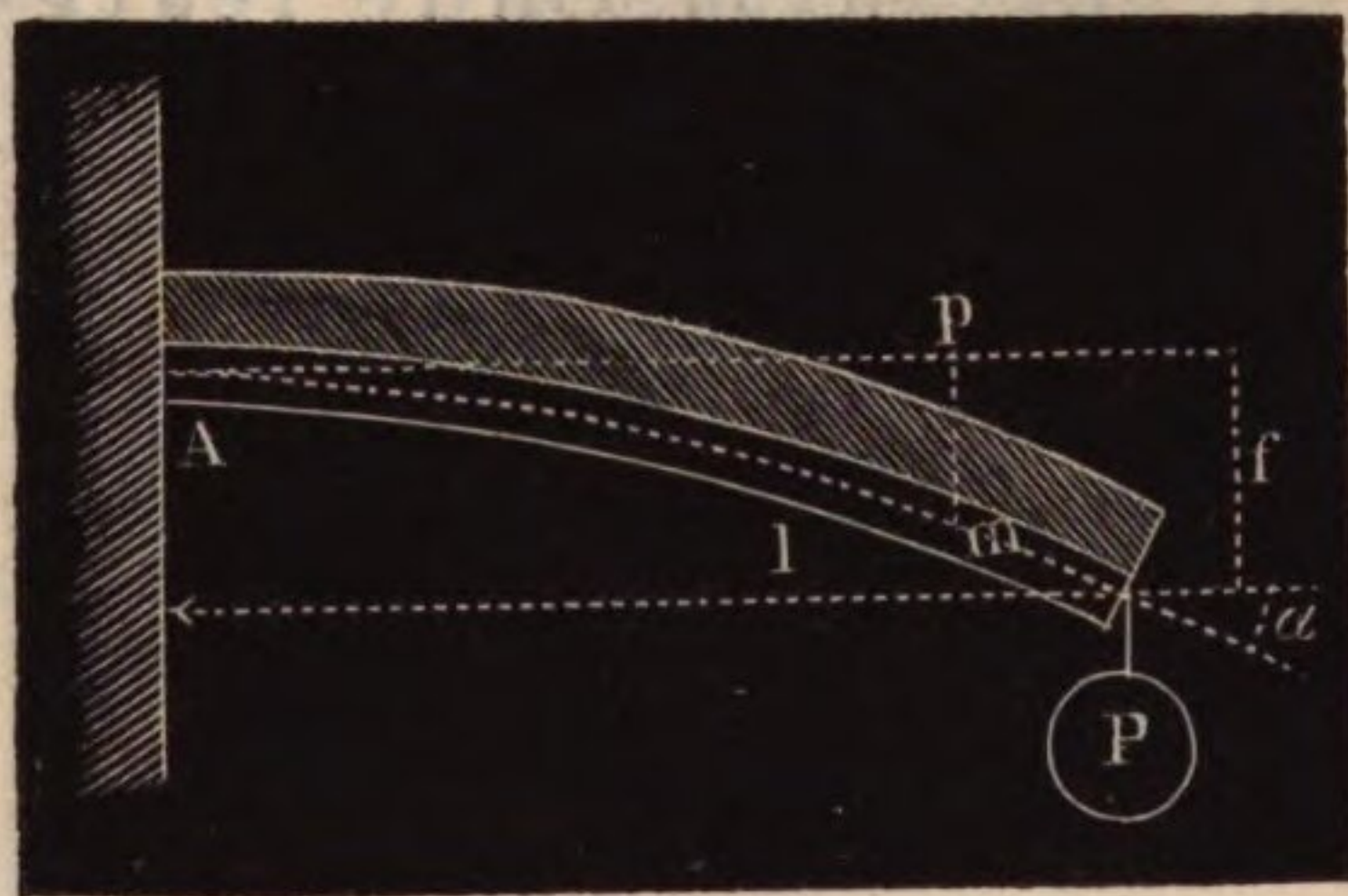
$$f = \frac{P}{\epsilon} \cdot \frac{l^3}{3} \quad \dots \quad (52)$$

$$\tan \alpha = \frac{Pl^2}{2\epsilon} = \frac{3f}{2l} \quad \dots \quad (53)$$

29.

Biegung eines Stabes, welcher an einem Ende befestigt ist, an dessen freiem Ende eine Last P wirkt, und auf dessen Länge eine Last Q gleichförmig vertheilt ist. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Die Bezeichnungen seien dieselben wie im vorigen Paragraphen; alsdann ist:

$$y = \frac{P}{2\varepsilon} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{Q}{l\varepsilon} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{lx^3}{6} + \frac{l^2x^2}{4} \right) . \quad (54)$$

$$f = \frac{l^3}{24\varepsilon} (8P + 3Q) (55)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{l^2}{6\varepsilon} (3P + Q) (56)$$

Die gleichförmig vertheilte Last Q kann das Eigengewicht des Stabes repräsentiren.

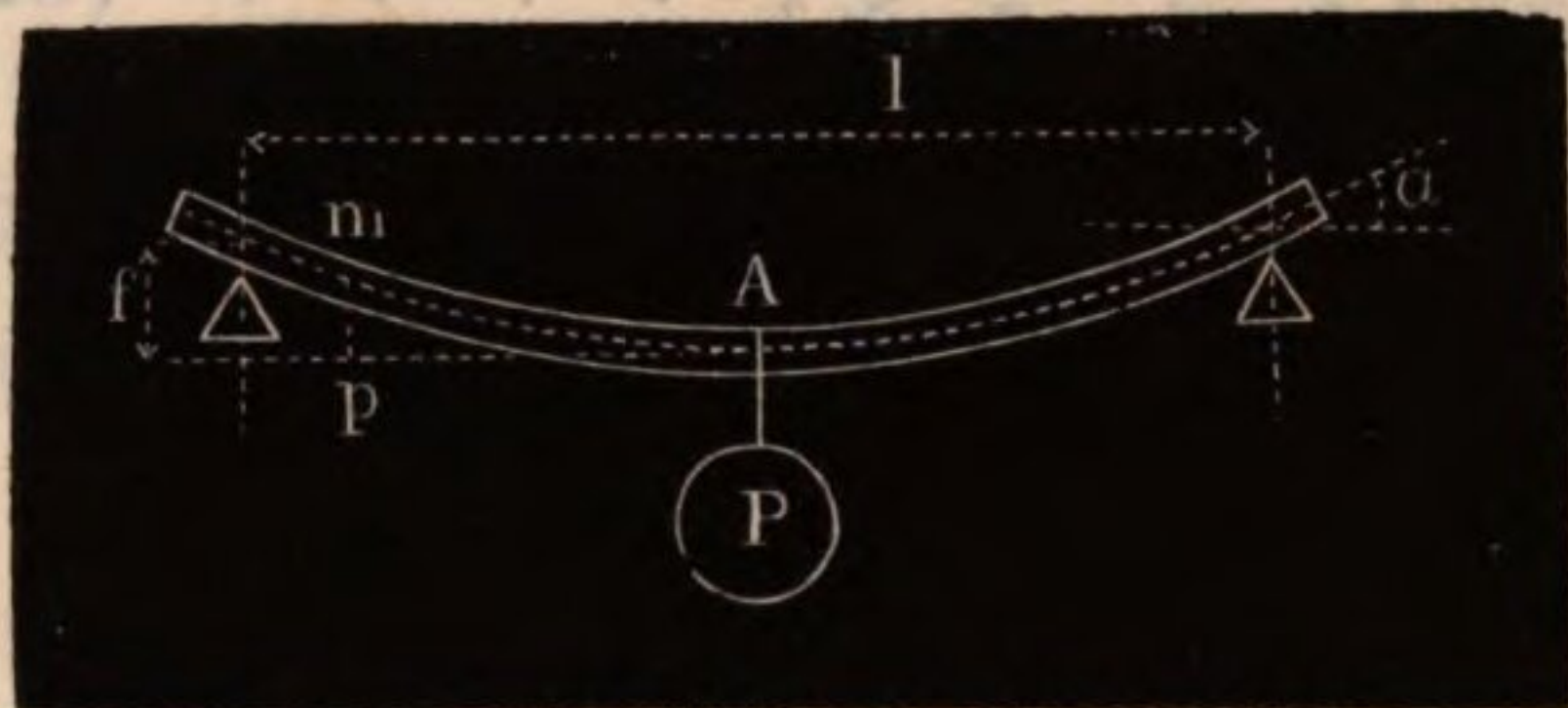
30.

Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützen liegt und in der Mitte belastet ist. (Fig. 28.)

Es sei:

P die in der Mitte des Stabes aufgehängte Last, senkrecht auf die Längsachse desselben wirkend;

Fig. 28.



l die Entfernung der Stützpunkte von einander;

f die Einbiegung der neutralen Faser in der Mitte;

α der Winkel, den die an einem der Stützpunkte an die neutrale Faser gezogene Tangente mit der ursprünglichen Richtung der neutralen Faser bildet;

ε das Biegungsmoment des Stabes $= ET$;

$x = Ap$, $y = pm$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der neutralen Faser.

Vernachlässigt man das Eigengewicht des Stabes, so ist:

$$y = \frac{P}{4\varepsilon} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) (57)$$

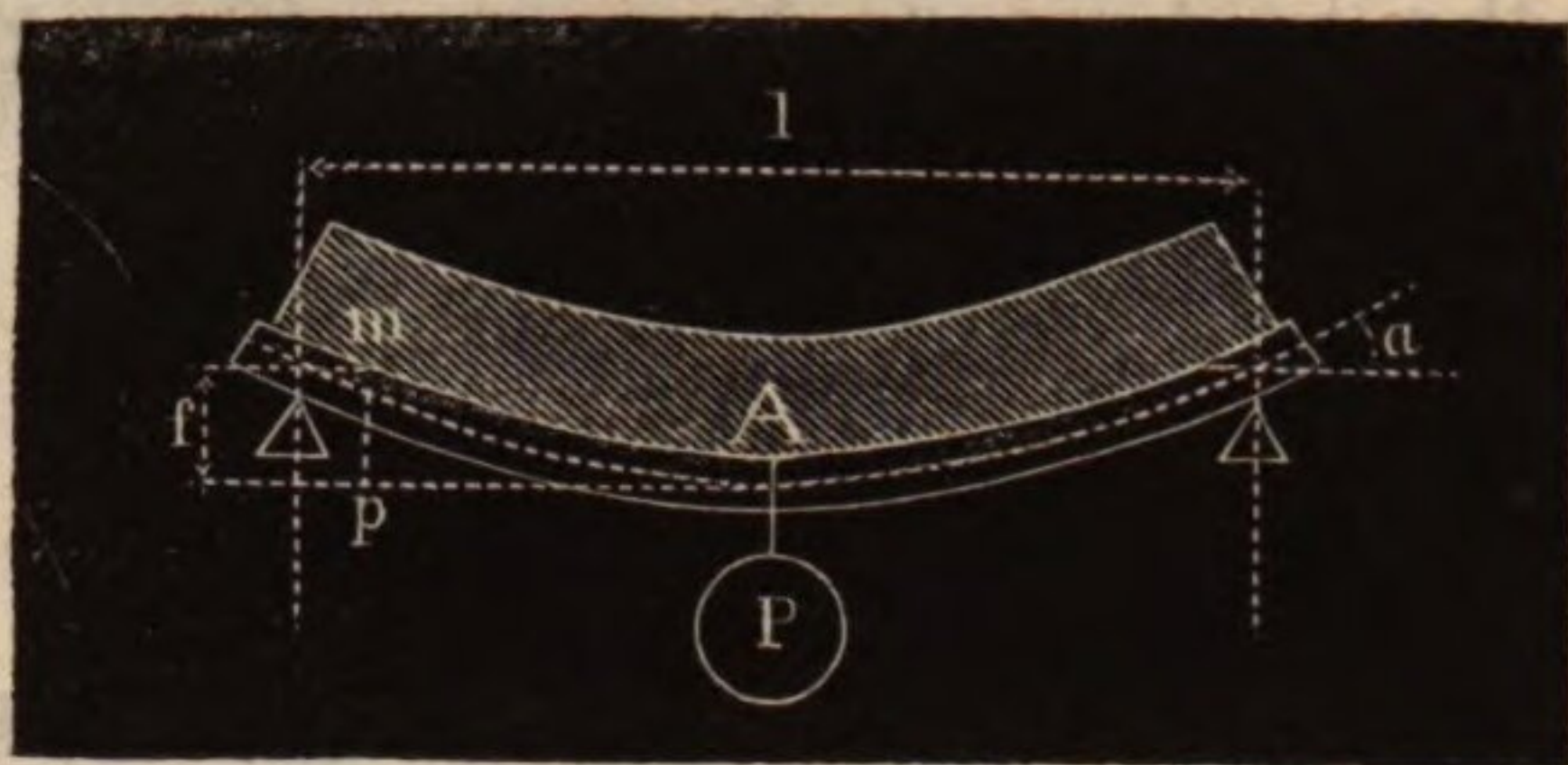
$$f = \frac{Pl^3}{48\varepsilon} (58)$$

$$\text{tang } \alpha = 3 \frac{f}{l} = \frac{Pl^2}{16\varepsilon} (59)$$

31.

Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützen liegt und auf den ausser einer in seiner Mitte wirkenden Last P noch eine Last Q über seine ganze Länge vertheilt ist. (Fig. 29.)

Fig. 29.



Die Bezeichnungen sind dieselben wie in dem vorigen Paragraphen. Es ist:

$$y = \frac{P}{4\varepsilon} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{Q}{\varepsilon l} \left(\frac{l^2 x^2}{16} - \frac{x^4}{24} \right) \quad (60)$$

$$f = \frac{l^3}{384\varepsilon} (8P + 5Q) \quad (61)$$

$$\tan \alpha = \frac{l^2}{16\varepsilon} \left(P + \frac{2}{3} Q \right) \quad (62)$$

32.

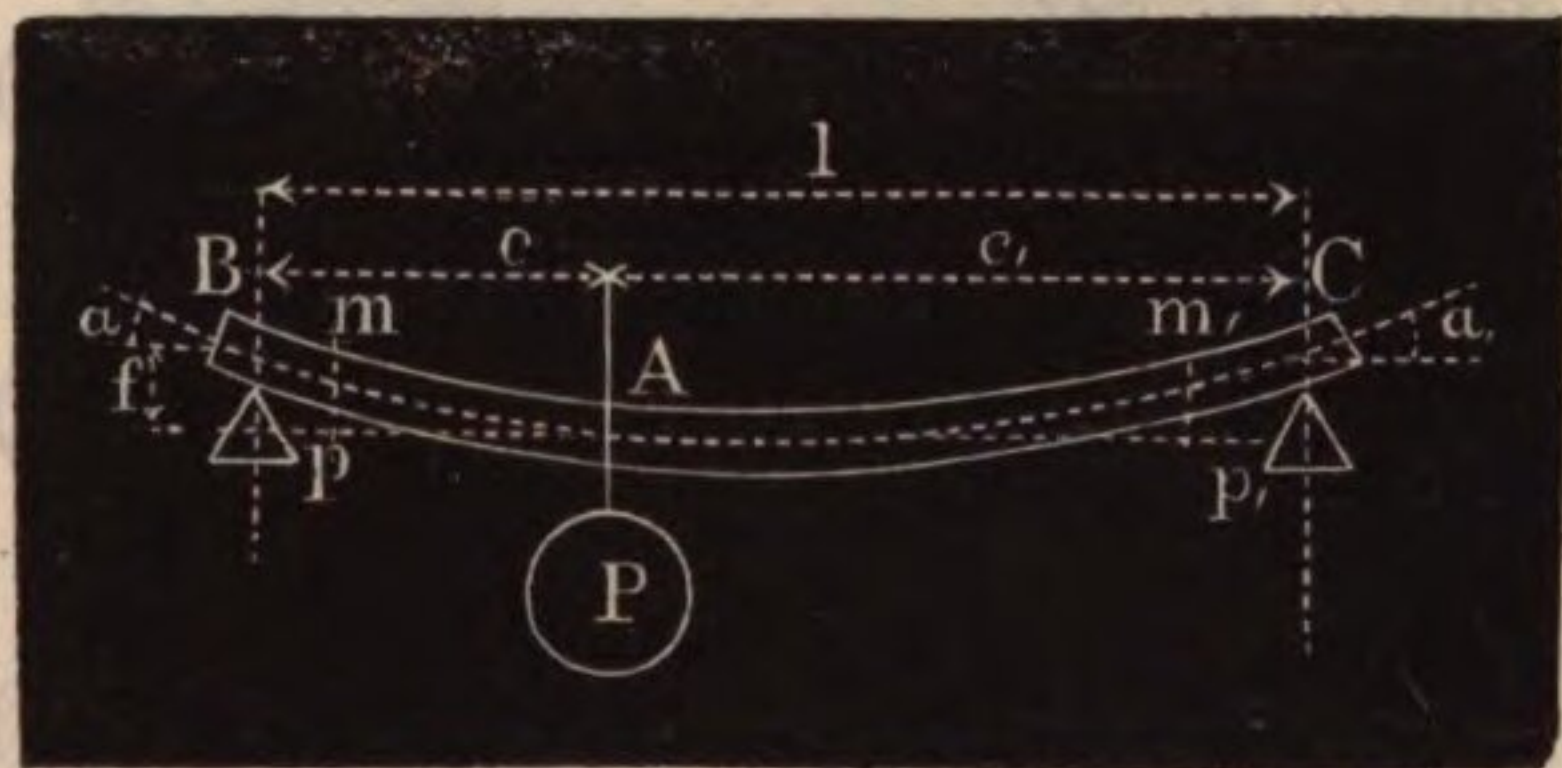
Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützpunkten liegt, und durch eine Kraft P belastet ist, deren Angriffspunkt um c und c_1 von den Stützpunkten entfernt ist. (Fig. 30.)

Es sei:

P die senkrecht auf die Längsachse des Stabes wirkende Kraft;

l die Entfernung der Stützpunkte von einander;

Fig. 30.



c und c_1 die Entfernungen des Aufhängepunktes der Last P von den Stützpunkten;
 f die Einbiegung der neutralen Faser am Aufhängepunkt der Last;
 α und α_1 die Winkel, welche

die Tangenten an die gebogene neutrale Faser bei den Stützpunkten mit der ursprünglichen Richtung der neutralen Faser bilden;

$x = Ap$, $y = pm$ die Coordinaten eines Punktes der gebogenen neutralen Faser zwischen A und B ;

$x_1 = Ap_1$, $y_1 = p_1 m_1$ die Coordinaten eines Punktes der gebogenen neutralen Faser zwischen A und C .

Vernachlässigt man das Eigengewicht des Stabes, so ist:

$$y = \frac{c_1 P}{l \varepsilon} \left(\frac{c x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x c (c - c_1)}{3} \right) \dots \dots (63)$$

$$y_1 = \frac{c P}{l \varepsilon} \left(\frac{c_1 x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1 c_1 (c - c_1)}{3} \right) \dots \dots (64)$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c^2 \cdot c_1^2}{3l} \dots \dots \dots (65)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c c_1 (2 c_1 + c)}{6l} \dots \dots \dots (66)$$

$$\text{tang } \alpha_1 = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{c c_1 (2 c + c_1)}{6l} \dots \dots \dots (67)$$

Wenn $c > c_1$, so liegt die grösste Senkung der Curve zwischen A und B und der Werth von x , welcher dem Punkt dieser grössten Senkung entspricht, ist:

$$x = c - \sqrt{\frac{c}{3} (c - 2 c_1)} \dots \dots \dots (68)$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von x in die Gleichung für y findet man den Werth der grössten Senkung.

Rückwirkende Festigkeit.

33.

Die von der Wissenschaft für diese Art von Festigkeit aufgestellten Theorien scheinen keine Resultate zu liefern, welche mit denen der zahlreichen darüber angestellten Versuche genügende Uebereinstimmung zeigen. Da diese Versuche aber nur die Umstände untersuchten, welche den Bruch eines Kör-

pers bedingen, so kann aus denselben nicht mit Bestimmtheit geschlossen werden, dass die aufgestellten Theorien nothwendig unrichtig seien, indem diese unter besonderen Voraussetzungen und gestützt auf die nur innerhalb der Elasticitätsgrenzen geltenden Gesetze hergeleitet wurden. Wegen der einstweiligen Unentschiedenheit dieser Streitfrage ziehen wir es jedoch vor, die theoretisch entwickelten Formeln hier ebenso unberührt zu lassen, wie die rein empirischen Formeln, welche für einzelne Fälle (wie von Rondelet für hölzerne Pfosten und von Hodgkinson namentlich für gusseiserne Säulen) aufgestellt worden sind.

Arbeitgrössen, welche zur Verlängerung, Verkürzung, Drehung und Biegung von prismatischen Stäben erforderlich sind.

34.

Die Formeln der vorhergehenden Paragraphen drücken nur die Bedingungen aus, welche erfüllt sein müssen, wenn zwischen den Elasticitätskräften eines Körpers und einer äusseren auf denselben einwirkenden Kraft Gleichgewicht stattfinden soll. Da aber bei jeder Einwirkung einer äusseren Kraft auf einen Körper der Letztere entweder verlängert oder verkürzt, verdreht oder gebogen wird, und der Angriffspunkt der äusseren Kraft hierbei immer einen gewissen Weg beschreibt, so wird die Kraft, welche eine Formänderung eines Körpers bewirkt, dabei auch stets eine von der Grösse der Formänderung abhängige mechanische Arbeit entwickeln. Bleiben sämtliche in einem Körper eintretende Spannungen vollkommene Elasticitätskräfte, so kann man mit Hülfe der Mechanik die Arbeitgrösse ermitteln, welche aufzuwenden ist, damit ein Körper von bestimmtem Material und bekannten Dimensionen eine gewisse Formänderung annehme, oder dass die in ihm eintretende stärkste Spannung eine gewisse Grösse erreiche. Vermittelst der in dem folgenden Paragraphen aufgestellten Formeln lassen sich die Arbeitgrössen berechnen,

welche einigen der häufigst vorkommenden Formänderungen der Körper entsprechen. Diese Formeln können jedoch nur in den Fällen richtige Resultate liefern, wenn die Zeit, während welcher die Arbeitgrösse zur Wirkung kommt, so gross ist, dass die in dem Körper erzeugten Spannungen sich auf alle Moleküle desselben in entsprechender Weise vertheilen und dass bis zum Eintreten des Gleichgewichtes zwischen irgend zwei Molekülen keine Spannung eingetreten sei, welche die der entsprechenden Elasticitätsgrenze überschreite. Werden aber durch die äussere Kraft Schwingungen oder Vibrationen in dem Körper erzeugt, so können die hierdurch entstehenden Formänderungen nicht aus den Formeln des folgenden Paragraphen berechnet werden.

35.

A. Verlängerung oder Verkürzung.

Es sei:

V das Volumen des Stabes;

l die Länge des Stabes;

Ω der Querschnitt des Stabes;

E der Modul der Elasticität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

λ die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes;

$\mathfrak{S}$ die Spannung pro Flächeneinheit, welche in jedem auf die Zug- oder Druckrichtung normalen Querschnitt des Stabes eintritt, wenn derselbe um λ verlängert oder verkürzt worden ist;

A die Arbeitgrösse, welche der Verlängerung oder Verkürzung des Stabes um λ entspricht;

alsdann ist:

$$A = \frac{E}{2} \Omega \frac{\lambda^2}{l} \dots \dots \dots (69)$$

oder auch:

$$A = \frac{1}{2} V \frac{\mathfrak{S}^2}{E} \dots \dots \dots (70)$$

Diese beiden Gleichungen sind nur so lange gültig, als entweder λ die Verlängerung oder Verkürzung bei der entsprechenden Elasticitätsgrenze, oder $\mathfrak{S}$ den bezüglichen Werth

von F_z oder F_d nicht übersteigt. Die stabile Festigkeit der Materialien gegen Arbeitgrössen, welche eine Verlängerung oder Verkürzung des Stabes erzeugen, ist nach dem Quotienten $\frac{F_z}{E}$ resp. $\frac{F_d}{E}$ zu beurtheilen.

B. Drehung der Stäbe.

Es sei:

V das Volumen eines prismatischen Stabes;

G der Drehungsmodul des Materials, aus welchem der Stab besteht;

$\mathfrak{S}$ die auf die Flächeneinheit bezogene grösste Spannung, welche in der von der Achse des Stabes entferntesten Faser in Folge einer Verdrehung desselben eintritt;

A die Arbeitgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab soweit zu verwinden, dass die Spannung $\mathfrak{S}$ eintritt;

alsdann ist:

a) für Stäbe von kreisförmigem Querschnitt:

$$A = \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{S}^2}{G} V \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (71)$$

b) für Stäbe von quadratischem oder rechteckigem Querschnitt:

$$A = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{S}^2}{G} V \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (72)$$

Diese Formeln sind so lange gültig, als die Spannung $\mathfrak{S}$ nicht grösser wird als der Coëfficient F_z des betreffenden Materials, und kann der Quotient $\frac{F_z^2}{G}$ als Maass der stabilen Widerstandsfähigkeit der Materialien gegen die eine Verdrehung erzeugenden Arbeitgrössen dienen.

C. Biegung der Stäbe.

Es sei:

Z der Querschnittsmodul des Stabes;

a der Abstand der stärkst gespannten Faser von der neutralen Achse;

l die ganze Länge des Stabes;

$\mathfrak{S}$ die auf die Flächeneinheit bezogene grösste Spannung, welche in Folge der Biegung in dem Stabe eintritt;

E der Elasticitätsmodul des Materials, aus welchem der Stab besteht;

V das Volumen des Stabes;

A die Arbeitgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu biegen, dass die Spannung $\mathfrak{S}$ eintritt; alsdann ist:

$$A = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{S}^2}{E} \cdot \frac{Zl}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (73)$$

und gilt diese Formel sowohl für den Fall, dass der Stab an einem Ende befestigt und die Arbeitgrösse auf das freie Ende des Stabes ausgeübt wird, als auch wenn der Stab an seinen Endpunkten unterstützt ist und die Arbeitgrösse auf irgend einen Punkt seiner Länge wirkt.

Der Quotient $\frac{Zl}{a}$ ist bei den einfacheren Querschnittformen dem Volumen des Stabes proportional und man hat:

a) für Stäbe von quadratischem oder rechteckigem Querschnitt:

$$A = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{S}^2}{E} V \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (74)$$

b) für Stäbe von vollem kreisförmigen Querschnitt:

$$A = \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{S}^2}{E} V \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (75)$$

Diese Formeln sind nur so lange gültig, als die Spannung $\mathfrak{S}$ nicht grösser wird wie der für den betreffenden Fall nach der Tabelle in §. 20 zulässige Werth von $\mathfrak{S}_{max}$. und kann der Quotient $\frac{(\mathfrak{S}_{max})^2}{E}$ als Maass der stabilen Festigkeit der Materialien gegen Arbeitgrössen, welche eine Biegung hervorbringen, angesehen werden.

36.

In den beiden folgenden Tabellen sind für verschiedene Materialien die numerischen Werthe der Coëfficienten zusammengestellt, welche zur Berechnung der stabilen Festigkeit von Constructionstheilen zu gebrauchen sind. Es könnte vielleicht befremden, dass von dem so wichtigen Coëfficienten F_d nur für Schmied- und Gusseisen die numerischen Werthe an-

gegeben sind. Dies hat seinen Grund darin, dass man die stabile Druckfestigkeit bisher so wenig beachtet hat; die beiden einzigen mitgetheilten Werthe verdankt man den vortrefflichen und mit so ausgezeichnete Umsicht veranstalteten Versuchen von Professor Hodgkinson. Da aber Gusseisen und Schmiedeeisen unbedingt die wichtigsten Constructionsmaterialien des Ingenieurs sind, so dürften die Tabellen doch in der grössten Zahl von Fällen ausreichende Dienste leisten. Allerdings würde es für die Technik sehr wichtig sein, den Werth von F_d auch für Holz und Stahl zu kennen, und würden auf die Ermittlung desselben hinzielende Versuche des Dankes des technischen Publicums sicher sein können. Für die Materialien der Seile und Riemen sind die Coëfficienten der stabilen Zugfestigkeit noch nicht bekannt.

Die erste Tabelle ist bei Rechnungen in französischem Maasssystem zu gebrauchen. Bei Anwendung ihrer Coëfficienten müssen in allen Formeln die sämtlichen Abmessungen in Millimetern, die Gewichte in Kilogrammen ausgedrückt werden.

Die zweite Tabelle ist bei Rechnungen in preussischem Maasssystem zu verwenden. Bei Rechnungen mit ihren Coëfficienten müssen in allen Formeln die sämtlichen Abmessungen in preussischen Zollen, die Gewichte in preussischen Pfunden ausgedrückt werden.

Man erhält die Werthe der Tabelle II., wenn man die der Tabelle I. mit 1462,56 multiplicirt, und die Werthe der Tabelle I. aus denen der Tabelle II. durch Multiplication derselben mit 0,000684.

Es enthalten in den beiden Tabellen für die dort angegebenen Materialien:

- die Spalten F_z die Coëfficienten der stabilen Zugfestigkeit,
- die Spalten F_d die Coëfficienten der stabilen Druckfestigkeit,
- die Spalten E die Elasticitätsmodel,
- die Spalten G die Drehungsmodel.

Anmerkung. Die für Schmiedeeisen angegebenen Werthe für F_z und F_d sind Versuchen an englischen Eisensorten entnommen, und dürften wohl für gutes deutsches Eisen etwas zu niedrig gegriffen sein.

I. Tabelle der Coëfficienten für die Festigkeitsberechnungen in französischem Maasssystem.

Material.	F_z .	F_d .	E .	G .
Eichenholz	2	—	1200	480
Eschenholz	1,25	—	1120	448
Tannenholz	2,5	—	1400	560
Buchenholz	2	—	930	372
Schmiedeeisen	15	15	20000	8000
Eisendraht	30	—	20000	8000
Gusseisen	7,5	15	10000	4000
Stahl	25	—	20000	8000
Gussstahl	66	—	30000	12000
Kanonenmetall	2 (?)	—	3200	1280
Kupfer, gehämmert	3 (?)	—	11000	4400
Kupferdraht	12	—	12000	4800
Messing	4,8	—	6500	2600
Blei	1	—	500	200
Zink	2,3	—	9600	3840

II. Tabelle der Coëfficienten für die Festigkeitsberechnungen in preussischem Maasssystem.

Eichenholz	2925	—	1755000	702000
Eschenholz	1828	—	1638000	655200
Tannenholz	3656	—	2047600	819040
Buchenholz	2925	—	1360200	544080
Schmiedeeisen	21938	21938	29251200	11700480
Eisendraht	43877	—	29251200	11700480
Gusseisen	10969	21928	14625600	5850240
Stahl	36564	—	29251200	11700480
Gussstahl	96529	—	43877000	17550800
Kanonenmetall	2925 (?)	—	4680200	1872080
Kupfer gehämmert	4387 (?)	—	16088200	6435280
Kupferdraht	17551	—	17550000	7020000
Messing	7020	—	9506600	3802640
Blei	1462	—	731300	292420
Zink	3364	—	14040600	5616240

Schlussbemerkungen.

Es wurde am Schlusse von §. 5 ausgesprochen, dass die Herleitung der einzelnen Formeln nicht mitgetheilt werde, weil sie übereinstimme mit derjenigen, welche die Lehrbücher der Mechanik enthalten. Bei der Durchlesung des Vorhergehenden wird man jedoch gefunden haben, dass die Interpretation, welche hier den Formeln gegeben wurde, in vielen Fällen zu ganz anderen Resultaten führt, als die sind, welche andere Schriftsteller aus denselben Formeln gezogen haben. Es wird deshalb nicht uninteressant sein, in kurzem Ueberblick eine Vergleichung anzustellen zwischen den letzteren Resultaten und denjenigen, zu welchen die hier befolgte Anschauungsweise führt.

In den meisten Lehrbüchern der Mechanik werden in die Festigkeitformeln statt der Coëfficienten der stabilen Festigkeit, oder Theilen von diesen, Bruchcoëfficienten und deren aliquote Theile eingesetzt. Die Bruchcoëfficienten drücken die Spannung aus, welche pro Flächeneinheit in den Fasern eines Stabes in dem Augenblicke eintritt, welcher der Trennung der Körpertheilchen unmittelbar vorhergeht; durch zahlreiche Versuche hat man für die verschiedenen Materialien Bruchcoëfficienten bestimmt. Man sucht alsdann die auf die Bruchcoëfficienten bezogene Sicherheit (die wir Bruchsicherheit nennen wollen) so gross zu nehmen, dass die stärkste in den Fasern eintretende Spannung die bei der Elasticitätsgrenze stattfindende nicht überschreitet, wobei man den numerischen Werth der bei jedem Material und in den verschiedenen Fällen anzuwendenden Bruchsicherheit aus praktischen Erfahrungen ermittelte. Allein da die Coëfficienten der stabilen Festigkeit bei den verschiedenen Materialien in keinem constanten Verhältniss zu den Coëfficienten der Bruchfestigkeit stehen, so war man genöthigt, bei verschiedenen Materialien, welche unter übrigens gleichen Umständen verwendet wurden, und welche gegen die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenzen gleiche Sicherheit gewähren sollten, dennoch verschiedene Bruchsicherheiten in Rechnung zu ziehen.

Bei der Berechnung von Körpern, die auf Zug-, Druck- oder Drehungsfestigkeit beansprucht werden, deren Fasern also entweder alle nur verlängert oder alle nur verkürzt werden, lässt sich die stärkste zulässige Spannung für jedes Material durch eine constante Sicherheit in Bezug zu einem Brechungscoefficienten ausdrücken, und es lassen sich bei Einführung der Bruchcoefficienten und einer so gewählten Sicherheit, dass die Verlängerung oder Verkürzung der Fasern die entsprechende Elasticitätsgrenze nicht überschreitet, zwar auch Resultate erlangen, welche numerisch nicht verschieden sind von denen, welche bei Anwendung der Coefficienten der stabilen Festigkeit und der stabilen Sicherheit erhalten werden. Eine Formel aber, in welcher ein aliquoter Theil des Brechungscoefficienten eingesetzt ist, gewährt durchaus kein directes Urtheil über die Sicherheit gegen die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze, vor welcher man sich aber doch gerade durch die angestellte Rechnung schützen will. Bezieht man die Sicherheit nicht unmittelbar auf die stabile Festigkeit, so leistet von allen anderen Zahlen, auf welche man dieselbe beziehen will, eine gerade so gute Dienste wie die andere, und ist der Brechungscoefficient wohl diejenige Zahl, deren Benutzung noch am leichtesten zu gefährlichen Irrthümern führt, indem man dabei unbemerkt zu dem Gedanken verleitet werden kann, als stehe bei den verschiedenen Materialien die stabile Festigkeit in gleichem Verhältniss zur Bruchfestigkeit, und als könne daher Letztere als Bezugsgrenze die Erstere unmittelbar vertreten.

Die Nothwendigkeit, die Sicherheit von Constructionstheilen auf die stabile Festigkeit zu beziehen, ist auch in neuerer Zeit immer allgemeiner anerkannt, und bei der Behandlung der Zugfestigkeit von einzelnen Schriftstellern (Weisbach, Poncelet, Morin, Combes u. A.) vollständig durchgeführt worden; so nennt Professor Weisbach das, was wir den Coefficienten der stabilen Zugfestigkeit nennen, den Tragmodul.

Bei der Berechnung der Biegungsfestigkeit haben jedoch die Brechungscoefficienten ihre wohl nur in Folge langer Gewohnheit so fest eingenommene Stellung noch nicht eingebüsst. Es ist dies für die gesammte Constructionslehre von

um so grösserem Nachtheil, als gerade die Beanspruchung auf Biegungsfestigkeit die bei Weitem am häufigsten vorkommende ist, und in diesem Falle die Benutzung der Brechungscoefficienten nicht nur zu keinem Urtheile, sondern in vielen Fällen auch zu ganz fehlerhaften Resultaten führt. Denn da in einem gebogenen Stabe ein Theil der Fasern verlängert, während ein anderer verkürzt wird, so muss, wie in §. 19 gezeigt wurde, die in die Formeln einzuführende Maximalspannung, auf welche die stabile Sicherheit allein bezogen werden darf, sowohl von dem, bei dem zu verwendenden Material stattfindenden Verhältnisse $\frac{F_z}{F_d}$, als von

dem durch die Querschnittform bedingten Verhältnisse $\frac{a_z}{a_d}$ abhängen. Da also die stärkste zulässige Spannung bei einem gebogenen Stabe gleichzeitig von zwei Verhältnissen abhängt, so kann man dieselbe sogar für ein und dasselbe Material nicht allgemein durch ein Verhältniss zu einer constanten Grösse und also auch nicht allgemein durch eine Sicherheit in Bezug zu einem constanten Bruchcoefficienten ausdrücken.

Nur in dem Falle, wo, wie bei Schmiedeeisen, $F_z = F_d$ ist, und wo in Folge dessen das Verhältniss $\frac{a_z}{a_d}$ ohne Einfluss auf die Spannung $\mathcal{S}_{max}$. bleibt, kann man letztere Spannung auf eine constante Grösse beziehen und hierzu, wenn man gleichgültig gegen das richtige Urtheil ist, welches der Bezug zu F_z über die stabile Sicherheit einer Construction direct gewährt, natürlich auch den Brechungscoefficienten wählen. Sind jedoch, wie beim Gusseisen, F_z und F_d sehr verschieden, so müsste man, um eine bestimmte Sicherheit gegen die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenzen zu erhalten, nicht nur für jedes derartige Material, sondern auch für jede Querschnittform, für welche nach der Tabelle in §. 20 $\mathcal{S}_{max}$. einen anderen Werth erhält, eine andere Bruchsicherheit in Rechnung bringen, wenn der Bruchcoefficient constant sein soll. Wollte man dagegen, um denselben Zweck zu erreichen, eine constante Bruch-

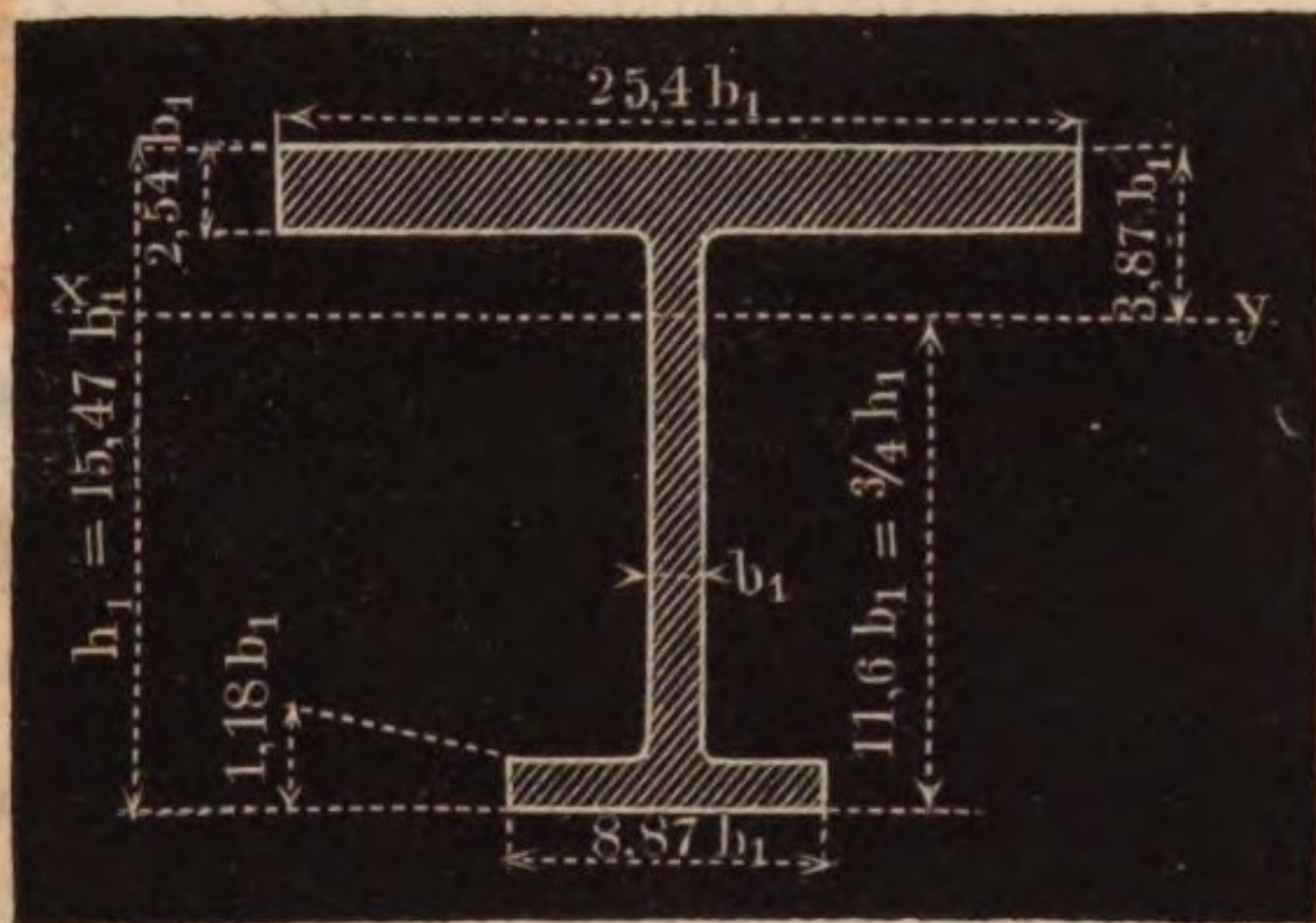
sicherheit anwenden, so müsste man für jedes Material nicht einen Bruchcoefficienten, sondern deren so viele bestimmen, als man mit dem Material Querschnittformen ausführen will, bei denen S_{max} . ein Anderes ist. Die Aufsuchung so vieler Brechungscoefficienten möchte jedoch wohl eine Aufgabe sein, welche auch dem eifrigsten Experimentator zu umfangreich erscheinen könnte, und deren Lösung bisher auch noch nicht durchgeführt wurde.

Bei der Berechnung gusseiserner Constructionstheile ist man daher bei Benutzung eines constanten Brechungscoefficienten genöthigt, eine aus der Vergleichung ähnlicher ausgeführter Constructionen abgeleitete Sicherheit anzuwenden. Die Hülfe, welche die Theorie in solchen Fällen der Praxis zu leisten vermochte, war daher nur eine scheinbare und wurde von Letzterer auch meist verschmäht. Auch die weitläufigen theoretischen Untersuchungen, welche Professor Tate über die Festigkeit eiserner Träger angestellt hat, beweisen nur, dass man für Träger, deren zur neutralen Achse normale Querschnittdimensionen constante Verhältnisse haben, die Sicherheit auf einen constanten Bruchcoefficienten beziehen kann, welcher durch Versuche für einen Träger von ähnlichem Querschnitt ermittelt wurde; es ist dies ein Resultat, welches aus der Tabelle in §. 20 unmittelbar hervorgeht, da bei einem und demselben Material S_{max} . so lange constant ist, als $\frac{a_z}{a_d}$ unverändert bleibt. Für beliebige Querschnittformen führt die Theorie von Professor Tate zu keinem directen Resultaten, und giebt sie ebensowenig einen Aufschluss über die stabile Festigkeit einer Construction.

Professor Hodgkinson versuchte es, auf anderem Wege der Praxis sichere Anhaltspunkte für die Bestimmung der Querschnitte für Gusseisen an die Hand zu geben, indem er sich auf die Erfahrung stützte, dass das Gusseisen dem Zerdrücken besser widerstehe als dem Zerreißen. Bei Anstellung einer Reihe von Versuchen über die Bruchfestigkeit eines Trägers von doppelt T förmigem Querschnitt erhielt er einen fort und fort grösser werdenden Brechungscoefficienten, wenn er das Material

auf der Zugseite des Querschnittes von Versuch zu Versuch vermehrte (ebenfalls ein Beweis, dass bei der Biegungsfestigkeit ein constanter Brechungscoëfficient nicht zulässig ist). Der Werth des Brechungscoëfficienten wurde ein Maximum, wenn das Material in dem Querschnitte so vertheilt war, dass bei fortgesetzter Biegung die stärkst verlängerten und verkürzten Fasern gleichzeitig brachen. Professor Hodgkinson glaubte, dass die von ihm gefundene Querschnittform — welche man eine von gleicher Bruchfestigkeit nennen könnte — hinsichtlich der Materialvertheilung die möglichst vortheilhafte sei; es erregte dieselbe in Folge davon bei den Ingenieuren bedeutendes Aufsehen und wurde auch vielfach zur Anwendung gebracht. Da es aber offenbar nicht die Absicht sein kann, einen Träger so zu construiren, dass seine Vorzüge erst im Augenblicke des Bruches zur Geltung kommen, sondern man den Träger trotzdem nie stärker belasten will, als es die Erhaltung der vollkommenen Elasticität der Fasern erlaubt, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass der Hodgkinson'sche Querschnitt hinsichtlich der Güte der Materialverwendung einem solchen von gleicher stabiler Festigkeit nachstehen werde. Eine Vergleichung des in Fig. 32 dargestellten, von Professor Hodgkinson bestimmten Querschnittes mit dem ähnlichen Querschnitt Nro. IV. der Tabelle in §. 26 wird die bedeutende Materialersparniss des letzteren im Vergleich mit dem anderen zeigen.

Fig. 32.



In dem Querschnitt Fig. 32 ist $\frac{a_z}{a_d} = \frac{1}{4}$, weshalb als $\mathfrak{S}_{max}$.

in den Ausdruck für das Elasticitätsmoment, wie in dem für den Querschnitt Nro. IV. in §. 26, F_d eingesetzt werden darf. Zur Vergleichung der Elasticitätsmomente hat man

daher nur das Verhältniss der Querschnittmodel aufzusuchen. Für den Querschnitt Nro. IV. ist $Z = 0,0992 h^3$, für den Hodgkinson'schen Querschnitt ist $Z_1 = 0,0457 h_1^3$; soll $Z = Z_1$ sein, so wird $h = 0,772 h_1$, woraus die Fläche F für den Quer-

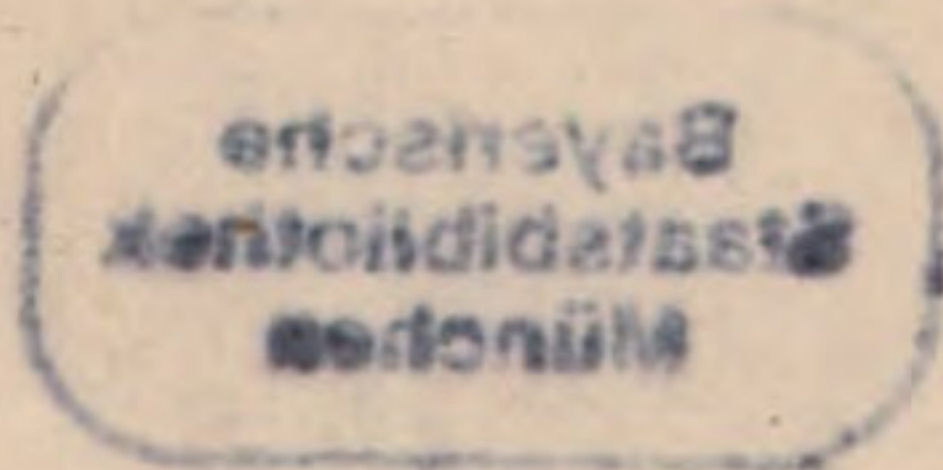
schnitt Nro. IV. $= 0,1335 h_1^2$, während die Fläche F_1 für den Querschnitt in Fig. 32 $= 0,362 h^2$ ist. Bei gleichen Elasticitätsmomenten ist daher:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{0,362}{0,1335} = 2,7.$$

Es bedarf also ein Träger, dessen Querschnitt wie Fig. 32, um bei gleicher Belastung dieselbe stabile Sicherheit zu gewähren, 2,7 mal soviel Material, als ein gleich langer Träger, dessen Querschnitt nach Nro. IV. geformt ist.

Für dasselbe Princip, welchem Professor Hodgkinson bei der Ermittlung seines Querschnittes für Gusseisen zu genügen suchte, wurde auch für Schmiedeisen die Durchführung verwirklicht und zwar durch die vortrefflichen und grossartigen Versuche, welche für die Aufsuchung des besten Querschnittes der Röhren für die Conway- und Britannia-Brücke unter Fairbairn's Leitung ausgeführt wurden. Bei der Vertheilung des Materials auf Boden und Decke der Röhren hatte man die Herstellung eines Querschnittes von gleicher Bruchfestigkeit im Auge, und wurde ein solcher auch bei der Ausführung angewandt. Da aber der Querschnitt doch so berechnet wurde, dass, auch bei der grössten Belastung der Brücke, die im Querschnitte vorkommenden stärksten Spannungen noch weit unter den bei der Elasticitätsgrenze stattfindenden bleiben, so ist es gar nicht zweifelhaft, dass man (abgesehen von dem Einfluss der Verniethung) durch gleichmässige Vertheilung des Materials auf Boden und Decke, ohne die stabile Sicherheit der Construction zu vermindern, weniger Material bedurft hätte, als es der Querschnitt von gleicher Bruchfestigkeit nothwendig machte. (Morin räth in seinem neuen Werke »Résistance des matériaux« ebenfalls eine gleichmässige Material-Vertheilung auf Boden und Decke an.)

Auch eine weiter fortgesetzte Vergleichung der Resultate, welche die in dem vorliegenden Schriftchen durchgeführte Interpretation der Festigkeitformeln zu geben vermag, mit den Ergebnissen, welche die die Brechungscoëfficienten in Betracht ziehende Methode bisher geliefert hat, dürfte wohl immer zu Gunsten der ersteren Methode ausfallen, indem dieselbe, was



in Bezug auf die Praxis doch meist der einzige Zweck der Festigkeitsberechnungen ist, eine klare Einsicht gewährt in die Widerstandsfähigkeit gegen äussere Kräfte, welche ein Körper dauernd und ungeschwächt bieten kann. In Folge dieser klaren Einsicht wird man jedenfalls im Stande sein, sich auf dem Gebiete der Construction freier zu bewegen, als es bei der Menge der Fragen, welche die andere Methode dem Construirenden unbeantwortet lässt, möglich ist. Aus den aufgestellten Regeln lassen sich noch zahlreiche, für die Praxis fruchtbare Schlüsse und Folgerungen ziehen, deren weitere Ausführung jedoch hier unterbleiben muss.



Moll, Carl L.

Die Festigkeit der Materialien, namentlich des Guss- und Schmiede Eisens
zunächst für Ingenieure und polytechnische Schulen

Braunschweig 1853

BHS III 40

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708295-3